Arno Viero[1]

A Completude da Lógica de Primeira Ordem e o Problema da Existência Matemática

Em seu trabalho de 1929, intitulado "On the Completeness of the Calculus of Logic", Gödel estabeleceu, pela primeira vez, a completude da lógica de primeira ordem com identidade. Na introdução, Gödel elabora alguns comentários extremamente importantes para que possamos entender o real significado atribuído por ele à completude do *cálculo funcional restrito.* O resultado de completude ali estabelecido mostrava que toda fórmula válida passível de ser expressa no sistema seria derivável a partir dos axiomas, através de uma seqüência finita de inferências formais. No entanto, Gödel chama a atenção para o fato de que tal resultado pode ser expresso de uma forma distinta, a saber, todo sistema consistente possui uma realização. Esta formulação teria uma importância fundamental no estudo dos sistemas dedutivos:

> (...) A última formulação parece apresentar especial interesse, uma vez que a solução deste problema representa, em um certo sentido, a complementação teórica do método usual de provar a consistência [de um sistema] (...); pois nos forneceria uma garantia de que em todos os casos tal método alcançaria seus objetivos, ou seja, é possível produzir uma contradição, ou provar a consistência através de um modelo (Gödel, 1986, p.61).

Logo a seguir, Gödel chama a atenção para uma crítica de Brouwer à relação que era estabelecida, por este método, entre as noções de consistência e de modelo:

---

1 Professor do Depto. de Filosofia da Universidade Federal Fluminense – UFF.

2 Este trabalho foi apresentado no *I Congresso Ibero-americano de Filosofia da Ciência* na cidade de Morélia, México, em setembro de 2000.

> (...) L. E. Brouwer, em particular, chamou a atenção para o fato de que da consistência de um sistema de axiomas não podemos concluir, sem nenhuma hipótese adicional, que um modelo pode ser construído (...) (Gödel, 1986, p.61).

Gödel, então, procura elaborar uma possível resposta a tal objeção:

> (...) Alguém poderia pensar que a existência das noções introduzidas através do sistema de axiomas deveria ser definida inteiramente pela sua consistência (...). Esta definição (...), contudo, pressupõe explicitamente o princípio de que todo problema matemático é solúvel ou, mais precisamente, que não é possível demonstrar a insolubilidade de qualquer problema matemático. Se isto ocorresse, no domínio dos números reais, da definição acima, decorreria a existência de duas realizações não isomórficas do sistema axiomático dos números reais enquanto que, de outro lado, seria possível demonstrar o isomorfismo de qualquer par destas realizações (Gödel, 1986, p.61).

Na citação, Gödel pretende estabelecer dois pontos: (1) o de que haveria uma resposta à objeção de Brouwer, bastando que para isso estabelecêssemos uma relação bastante estreita entre as noções de existência e de consistência, e (2) o de que a adoção de um tal tipo de estratégia teria desdobramentos extremamente significativos no âmbito da teoria dos sistemas dedutivos.

O objetivo de nosso trabalho é examinar esta possível resposta sugerida por Gödel à objeção de Brouwer. Assim, analisaremos a concepção segundo a qual a existência matemática está intimamente associada a noção de consistência. Desta forma, esperamos mostrar que tal concepção é extremamente insatisfatória do ponto de vista conceitual.

A associação entre as noções de consistência e de existência está indissoluvelmente ligada ao nome do matemático alemão D. Hilbert. Assim, uma investigação preliminar de suas idéias coloca-se como um ponto de partida bastante natural no exame de tal concepção a respeito da noção de *existência matemática*.

A forma mais adequada para entendermos as idéias de Hilbert a respeito da existência matemática é o exame de seu livro *The Foundations of Geometry* (1899), bem como a correspondência trocada com o lógico e filósofo alemão G. Frege a respeito desta obra. No seu livro de 1899, Hilbert propõe uma nova forma de se entender a estrutura axiomática de uma teoria matemática. A razão de tal mudança se encontrava ligada a uma exigência crescente de rigor a partir dos vários desenvolvimentos da matemática no século XIX. O problema que então se colocava era o de produzir o maior controle possível nos procedimentos demonstrativos, evitando, com isto, a admissão de princípios que não houvessem sido explicitados previamente. Assim, a questão que se apresentava era dupla. Em primeiro lugar, era preciso achar uma forma de controlar as pressuposições iniciais, ou seja, os axiomas. Em segundo, era preciso exercer um controle rigoroso nos procedimentos de prova através dos quais os teoremas seriam obtidos a partir dos axiomas.

A solução para o problema dos axiomas foi o de colapsar as bases das relações de demonstrabilidade e definibilidade e conceber os axiomas como sendo definições dos termos e das relações primitivas do sistema. O segundo era de solução mais difícil e teria que esperar até o surgimento da noção de *prova formal* para que uma solução plenamente satisfatória fosse obtida.

É claro que esta nova forma de entender os axiomas de uma teoria era totalmente diferente da concepção clássica. Para os gregos, na base da teoria existiriam certos enunciados cuja verdade não seria objeto de prova. Segundo a concepção de Hilbert, os axiomas seriam certos tipos de definições para os quais, evidentemente, a questão da verdade se apresentava de uma forma completamente distinta.

As diferenças entre estas duas concepções a respeito da natureza dos axiomas podem ser detectadas na correspondência trocada entre Frege e Hilbert a respeito dos fundamentos da geometria. Frege era um adepto ferrenho da concepção clássica da axiomática:

> Denomino de axiomas proposições que são verdadeiras mas não são passíveis de prova (...). A partir da verdade dos axiomas se segue que eles não se contradizem uns aos outros (Frege, 1980, p.37).

Hilbert, por outro lado, defendia uma concepção diferente:

> (...) Se os axiomas, arbitrariamente assumidos, juntamente com todas as suas conseqüências não se contradizem entre si então, eles são verdadeiros e as coisas definidas por eles existem. Este é para mim o critério de verdade e existência (Hilbert *in*: Frege, 1980, p.39 e 40).

A partir desta nova perspectiva, a questão a respeito da consistência dos axiomas passava a ser central. Hilbert percebeu muito bem tal necessidade e, no seu livro, apresentou duas demonstrações de consistência para o seu sistema que tinha como objetivo uma apresentação completamente rigorosa da geometria euclidiana.

A solução adotada por ele será a única disponível na época, ou seja, a construção de dois modelos nos quais os axiomas de seu sistema se verificariam. A base do primeiro modelo elaborado por Hilbert é um corpo de números algébricos Ω que é gerado a partir do número 1, através de um número finito de aplicações das quatro operações aritméticas básicas, acrescidas da operação $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, onde ω denota, sempre, um número obtido a partir das cinco operações anteriores. O procedimento seguinte não envolve nenhum tipo de dificuldade particular. Um ponto é interpretado como sendo um par de números (x, y) de Ω, e as razões $(u{:}v{:}w)$ de três números quaisquer de Ω, uma vez garantido que u e v sejam diferentes de zero, devem ser interpretados como sendo a tradução algébrica da noção de linha reta. A seguir, Hilbert passa a considerar cada grupo de axiomas[3] e constata que cada um deles é satisfeito pelo modelo em questão. No caso dos axiomas de incidência, por exemplo, é suficiente ter presente que dados um ponto (x, y) e uma reta $(u{:}v{:}w)$, a existência da equação $ux+vy+w = 0$ significa que o objeto (x, y) mantém a relação de *estar sobre* $(u{:}v{:}w)$. Assim, é fácil perceber, por exemplo, que os vários axiomas de incidência se tornam verdadeiros sob uma tal interpretação. Além disto, todos os demais axiomas recebem uma interpretação que os tornam verdadeiros, com exceção do axioma V, 2[4].

A segunda demonstração que Hilbert fornece para o seu sistema é obtida, simplesmente, substituindo Ω pelo corpo dos números reais. Novamente, é fácil perceber que os axiomas do sistema elaborado por Hilbert são todos satisfeitos, inclusive o axioma de completude. Aliás, é importante perceber que este axioma caracteriza, unicamente, a geometria cartesiana, ou seja, embora

---

3 Os axiomas do sistema elaborado por Hilbert estão divididos em cinco grupos: I. os axiomas de incidência (8); II. os axiomas de ordem (4); III. os axiomas de congruência (5); IV. o axioma das paralelas (1) e V. os axiomas de continuidade (V.1 axioma de Arquimedes e V. 2 o axioma de completude linear). Estes são os grupos de axiomas apresentados na décima edição do livro de Hilbert, por P. Bernays, em 1962.

4 Este axioma não é necessário para a demonstração de teoremas da geometria euclidiana, mas sim para estabelecer a existência de uma correspondência 1-1 entre os pontos de uma linha reta e os números reais garantindo, desta forma, os resultados obtidos pela geometria analítica.

exista um número infinito de geometrias que satisfaçam os axiomas dos grupos I, II, III, IV e V.1[5], existe somente uma geometria que satisfaz, simultaneamente, os axiomas anteriores e o axioma V.2.

Ao contrário do que se pensa, Hilbert não foi, isoladamente, o artífice desta nova concepção de axioma. Antes dele, vários matemáticos italianos, tais como Peano, Padoa, Veronesi, Pieri, Vivanti, dentre outros haviam sugerido propostas bastante semelhantes e, sob alguns aspectos, matematicamente bem mais elaboradas. Contudo, Hilbert foi o primeiro a perceber a necessidade de uma prova de consistência ligada a esta nova forma de se conceber os sistemas axiomáticos.

Neste momento duas observações se fazem necessárias. A primeira delas diz respeito à relação entre as provas de consistência e os paradoxos surgidos com o advento da teoria de conjuntos. É um lugar comum, na literatura ligada, principalmente, à filosofia da matemática, associar o problema da consistência com a preocupação em se evitar contradições em um sistema. Ora, quando Hilbert elaborou seus modelos para a geometria euclidiana, ele estava preocupado, fundamentalmente, em mostrar que as estipulações que estavam na base de seu sistema eram compatíveis. Esta exigência surgia, naturalmente, a partir de sua forma de conceber a natureza e a função dos axiomas no desenvolvimento de uma teoria matemática. Nenhum tipo de paradoxo exerceu qualquer tipo de influência neste trabalho de Hilbert.

A outra observação diz respeito ao tipo de postura que tais investigações exigiam. Um fato que freqüentemente é ignorado é que a postura metateórica, tão cara às investigações lógicas e matemáticas deste século, tiveram sua origem na adoção de uma nova concepção do método axiomático. Muito antes do advento da *teoria da prova*, Hilbert já desenvolvia uma investigação tendo como objeto os sistemas axiomáticos. A adoção de uma nova noção de axioma conduziu, naturalmente, a esta nova forma de se estudar as teorias matemáticas.

Contudo, é importante perceber que certos problemas surgiam quando era necessário entender o significado conceitual das provas de consistência. Este foi um fato imediatamente compreendido por Frege. Se a consistência é o critério de existência, não se estaria incorrendo em um círculo

5 O primeiro axioma de continuidade corresponde, genericamente, ao processo de mensuração da distância entre dois pontos de uma linha reta com o auxílio de um segmento dado.

vicioso ao se apelar para a noção de modelo que, por sua vez, pressuporia a existência de certos objetos, para se estabelecer que os axiomas são compatíveis? Este problema é apresentado por Frege, na sua terminologia de conceitos e objetos:

> (...) Existe algum meio de provar a consistência que não seja através da exibição de um objeto que possua todas as propriedades? Contudo, se temos tal objeto, qual a necessidade de provarmos a sua existência através de uma prova de consistência? (Frege, 1980, p.47).
>
> (...) Quais são os meios de que dispomos para demonstrar que certas propriedades, estipulações (ou qualquer outra forma que se deseje denominá-las) não se contradizem mutuamente? A única forma que conheço é através da apresentação de um objeto que possua todas estas propriedades, fornecer um caso em que todas as estipulações sejam satisfeitas. Seguramente, não me parece possível demonstrar a consistência de outra forma qualquer (Frege, 1980, p.43).

O interessante é perceber, nestas duas citações de Frege, que o problema apresentado em relação à inteligibilidade das provas de consistência é duplo. Em primeiro lugar, a questão de pressupor aquilo que se deseja provar. Em segundo, o fato de que a construção de um modelo seria o único meio disponível capaz de estabelecer a consistência dos axiomas. No entender de Frege, estes dois problemas criariam dificuldades intransponíveis para a nova concepção a respeito da natureza dos axiomas, defendida por Hilbert.

É claro que, dentro do esquema conceitual de Hilbert, seria possível dar uma resposta parcial às objeções de Frege. A obtenção de um modelo numérico da geometria euclidiana pressupunha a existência de entidades pertencentes a outro domínio de investigação matemática, ou seja, a técnica da obtenção de provas de consistência pressuporia a existência de um outro tipo de entidade, distinto daquele estudado pela teoria em questão. Contudo, se a consistência é o critério de existência matemática, a construção de um novo modelo se faz necessária para o estabelecimento da existência dos objetos utilizados na construção do primeiro modelo. Desta forma, corria-se o risco de estabelecer uma cadeia de provas de consistência que levariam a um círculo vicioso, uma vez que a possibilidade de construções de modelos seria limitada.

Hilbert estava perfeitamente consciente de tal dificuldade. Em 1900, ao apresentar a sua famosa lista de problemas que deveria orientar as investigações matemáticas durante o século XX, ele formula, como segundo problema, a questão a respeito da compatibilidade dos axiomas da aritmética que se apresentava, por sua vez, como sendo a continuação natural de suas investigações a respeito dos fundamentos da geometria:

> Na geometria, a prova de compatibilidade dos axiomas pode ser efetuada através da construção de um domínio adequado de números tais que, a certas relações que se verificam entre estes números, correspondam os axiomas geométricos. Qualquer contradição nas deduções a partir dos axiomas geométricos deve ser possível de ser identificada a partir da aritmética deste domínio de números. Assim, a prova de compatibilidade dos axiomas da geometria se torna dependente do teorema que afirma a compatibilidade dos axiomas da aritmética (Hilbert, 1900, p.447).

A partir desta perspectiva, seria possível interpretar o surgimento da *teoria da prova* como uma resposta ao problema relacionado ao método usual de prova de consistência de um sistema, apontado por Frege. Através de "provas absolutas", a consistência seria estabelecida sem a utilização da noção de modelo, através de procedimentos de natureza puramente sintática. No entanto, a partir de 1918, quando Hilbert desenvolve de uma forma mais sistemática suas idéias a respeito dos fundamentos da matemática, a questão da existência passa a um segundo plano. Com a crescente importância dos paradoxos, o problema da consistência, a partir de então, esteve ligado, fundamentalmente, ao problema da correção dos sistemas formais.

Uma vez feitos tais esclarecimentos a respeito da relação entre as noções de *consistência* e de *existência matemática*, voltemos ao resultado de Gödel relativo à lógica de primeira ordem, bem como às suas observações sobre a relação de tais noções com a possível existência de sentenças indecidíveis.

Parece bastante natural considerar a sugestão de Gödel, citada no início deste trabalho, para fazer frente à crítica de Brouwer, como sendo um apelo à concepção hilbertiana a respeito da existência matemática. Aliás, tal postura é assumida várias vezes por Hilbert de uma forma bastante clara:

> Na axiomática formal as relações fundamentais não são admitidas como estando previamente constituídas, ao contrário, a sua determinação é obtida, de uma forma implícita, através dos axiomas. Assim, em todas as

> considerações no desenvolvimento de uma teoria axiomática somente utilizamos aquilo que está formulado de uma maneira explícita nos axiomas (Hilbert e Bernays, 1958, p.9).

Neste momento, é importante perceber que o resultado estabelecido por Gödel, em um certo sentido, era a implementação do projeto hilbertiano no âmbito da lógica de primeira ordem. Ao provar que todo conjunto de sentenças de primeira ordem ou é inconsistente ou possui um modelo, havia demonstrado que a consistência era uma garantia necessária e suficiente para a existência de um modelo. No entanto, uma certa cautela deve ser adotada quando se trata de examinar o conteúdo filosófico de tal resultado, em particular, os seus desdobramentos na questão da existência matemática.

O teorema de Gödel é um resultado matemático e, conseqüentemente, deve ser utilizado com muita cautela quando o problema em questão é de natureza filosófica. Por exemplo, para se obter a completude da lógica de primeira ordem é preciso aderir a pressuposições existenciais muito fortes[6]. Tal fato dilui, consideravelmente, as conseqüências filosóficas obtidas a partir de tal resultado, uma vez que as pressuposições existências utilizadas para provar a completude recolocam, novamente, o problema que está sob investigação.

Além disso, é importante lembrar que tal resultado é válido, exclusivamente, no âmbito da lógica de primeira ordem. É fácil produzir exemplos de teorias de segunda ordem para as quais a consistência não é uma garantia da existência de um modelo.Consideremos, por exemplo, o conjunto de sentenças da aritmética de Peano de segunda ordem formado pela conjunção dos axiomas de tal teoria juntamente com a negação de G, onde G é a sentença de Gödel que afirma a consistência da aritmética de Peano. Tal conjunto de sentenças, apesar de ser consistente[7], não possui modelo algum.

Feitas tais observações, retomemos à observação inicial de Gödel. A crítica ali elaborada à concepção de Hilbert pretende se basear em uma suposta contradição que surgiria no domínio dos número reais se considerássemos os axiomas como sendo definições dos termos e das relações primitivas do sistema. No caso de existirem sentenças indecidíveis

6 É necessário, por exemplo, assumir o axioma do infinito (na metalinguagem).

7 A consistência da aritmética de Peano, como de costume, é simplesmente assumida.

existiriam modelos não isomórficos da teoria dos números reais e, no entanto, seria possível demonstrar que todos os modelos da teoria seriam isomórficos.

É importante notar que Gödel, no seu raciocínio, confunde a teoria dos números reais, desenvolvida em primeira ordem, com a mesma teoria desenvolvida em segunda ordem. A teoria dos números reais de segunda ordem é categórica, ou seja, todos os seus *modelos principais* são isomórficos, no entanto, ela terá *modelos secundários*, ou seja, modelos que diferem em estrutura dos *modelos principais*. Em particular, irão existir modelos secundários de cardinalidade $\aleph 0$, ao passo que todos os *modelos principais* irão ter cardinalidade não enumerável. Estes fatos, de forma alguma, geram qualquer tipo de contradição envolvendo tal teoria. Uma vez feita a distinção entre *modelos principais* e *modelos secundários*, a objeção de Gödel perde completamente a sua força.

Contudo, é possível, em um certo sentido, resgatar a argumentação de Gödel no âmbito da lógica de primeira ordem. A idéia seria a de mostrar de que forma a completude de tais sistemas associados à existência de enunciados indecidíveis[8] gerariam problemas para a concepção da existência defendida por Hilbert.

Consideremos a aritmética de Peano de primeira ordem N. Hoje sabemos, graças ao trabalho de Gödel, que esta teoria é incompleta, ou seja, que é possível gerar uma sentença S tal que nem ela nem a sua negação são teoremas de N. Consideremos a teoria $N' = N \cup \{S\}$. Como esta teoria é consistente, pelo teorema de completude de Gödel ela teria um modelo M'. Em contrapartida, a teoria $N'' = N \cup \{\neg S\}$ também é consistente e, conseqüentemente possuiria um modelo M''. Ora, tanto M', como M'' são modelos de N e não são isomórficos entre si. Assim, da completude da lógica de primeira ordem e da existência de enunciados indecidíveis para a aritmética de Peano é possível estabelecer a existência de modelos não standard para a aritmética.

A questão que se coloca neste momento é a de saber quais seriam as conseqüências deste argumento para a concepção de existência esboçada no livro *The Foundations of Geometry*. Este problema conduz, naturalmente,

8 Na época em que Gödel demonstrou a completude da lógica de primeira ordem, ainda não existia nenhuma prova da existência de sentenças indecidíveis. Isto somente foi demonstrado por Gödel em seu célebre trabalho de 1931 intitulado "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I".

ao exame da noção de *definição*, utilizada por Hilbert para caracterizar a noção de *axioma*. Evidentemente que não se trata aqui de investigar o grande número de problemas colocados por este conceito, mas sim de chamar a atenção para algumas de suas características mais importantes e que são fundamentais para se perceber o tipo de problema gerado pela adoção das idéias de Hilbert.

As definições de um teoria são, simplesmente, estipulações de um certo tipo que tem por finalidade facilitar o desenvolvimento da teoria. É claro que certos tipos de exigências devem ser observadas na elaboração de tais estipulações. A formulação exata de tais restrições é um dos objetivos da chamada *teoria da definição*[9]. Existem, basicamente, duas exigências que toda definição deve satisfazer: a de não criatividade e a de eliminabilidade. A primeira afirma que uma nova definição jamais pode gerar resultados que não poderiam ser obtidos sem ela. A segunda traduz uma das características centrais das definições, a saber, elas são expedientes que, a princípio, podem ser eliminados sem que haja qualquer prejuízo para a teoria como tal.

O problema, agora, é saber com entender a concepção de Hilbert a partir de tais observações. Se os axiomas são definições, como estender a eles as exigências de eliminabilidade e não criatividade? Isto simplesmente não é possível e por uma razão muito básica: os axiomas são as verdades básicas a partir das quais são gerados todos os demais resultados da teoria. Neste sentido, eles são elementos absolutamente indispensáveis à teoria, sendo a sua eliminabilidade algo completamente destituído de significado.

Outra dificuldade surge, agora, em relação à noção de *prova*. A prova é um instrumento de geração de conhecimento na medida em que, através de sua utilização, é possível se estabelecer a verdade dos teoremas. Mas, para que isto seja possível, na base de tal procedimento devem estar enunciados verdadeiros. No entanto, segundo Hilbert, na base da relação de demonstrabilidade estariam definições que, de acordo com a teoria da definição, seriam estipulações arbitrárias não consideradas, portanto, nem verdadeiras e nem falsas. Desta forma, como compatibilizar a noção de prova como instrumento de conhecimento com a concepção de Hilbert? Isto simplesmente não é possível pelo fato de que, ao se conceber os axiomas como definições, a noção de verdade é deslocada da base da teoria.

---

9 Ver, por exemplo, o capítulo VIII de Suppes (1957) e o capítulo II de Suppes (1972).

Através deste procedimento é possível se conceber a prova como sendo um instrumento de natureza sintática, associado ao conceito de *verdade* de uma forma indireta[10]. Aliás, foi isto que acabou acontecendo no recente desenvolvimento da lógica e dos fundamentos da matemática devido, principalmente, à influência da obra de Hilbert.

Além da eliminabilidade e da não criatividade existem outras exigências que devem ser observadas quando se estabelecem as definições de uma teoria. A primeira delas é distinguir cuidadosamente entre a definição e o enunciado que afirma a existência do objeto definido. Assim, por exemplo, a vigésima segunda definição do livro I da obra de Euclides *The Elements*, define quadrado como sendo aquilo que é eqüilátero e possui todos os ângulos retos. Nada na definição nos assegura da existência de tal objeto. Esta questão somente é decidida na proposição I 46, onde Euclides constrói um quadrado a partir de um segmento de reta e mostra que o objeto, assim obtido, coincide com a definição fornecida anteriormente. Da mesma forma Dedekind, na sua obra intitulada "The Nature and Meaning of Numbers", primeiro define o que seja um sistema infinito (§ 64) para então demonstrar que tais sistemas existem (§ 66).

A outra exigência diz respeito a unicidade do objeto definido. Assim, por exemplo, na teoria de conjuntos a existência do conjunto vazio fica assegurada pelo *esquema axiomático de separação*. Contudo, em seguida é necessário demonstrar que tal conjunto é único, caso contrário, nossa estipulação apresentaria uma ambigüidade que a tornaria problemática quando empregada nas deduções da teoria.

Ora, o que a completude da lógica de primeira ordem e a existência de sentenças indecidíveis para a aritmética mostram, de uma forma conclusiva, é que se adotarmos a concepção de Hilbert, os axiomas da aritmética de Peano sempre "definirão" os números naturais de forma ambígua. Nunca será possível, portanto, caracterizar este tipo de estrutura na medida em que a existência de modelos não standard para a aritmética assegura que sempre haverá, no domínio da teoria, outras estruturas não isomórficas àquela dos números naturais.

Neste sentido, tratar os axiomas como definições gera uma situação análoga, se bem quem muito mais problemática, àquela na qual um

10 É claro que a prova de consistência asseguraria a verdade dos axiomas. Contudo, como compatibilizar este fato com o preceito segundo o qual os axiomas seriam definições?

sistema de equações lineares define as soluções do sistema. Na verdade uma certa cautela deve ser observada quando trabalhamos com tais sistemas, uma vez que podem ocorrer três situações distintas, a saber, (1) o sistema não tem solução; (2) o sistema tem uma solução única e (3) o sistema possui mais de uma solução. Pelo que vimos anteriormente a respeito da noção de definição, fica claro que o único caso em que seria possível se falar em definição seria o (2) [11]. Na terceira alternativa acima, o correspondente algébrico da situação envolvendo a aritmética de Peano, o preceito da não ambigüidade, não é possível de ser observado; desta forma, é totalmente inadequado referir-se a tal sistema como sendo uma definição das suas soluções. No entanto, no âmbito dos sistemas axiomáticos, a conclusão obtida a partir de tal fato foi a respeito da natureza e da forma de se conhecer estruturas matemáticas. Não seria muito difícil mostrar como a concepção dos axiomas como sendo definições e a redução da lógica à lógica de primeira ordem levaram Skolem primeiro ao relativismo e, depois, a uma forma de formalismo tão extrema que provavelmente não seria aceita nem pelo próprio Hilbert[12].

Na concepção de Hilbert fica muito clara a distinção entre a definição de um objeto ou de uma relação e a afirmação de sua existência. No caso da geometria euclidiana, por exemplo, somente seria possível afirmar a existência das entidades pertencentes ao domínio da teoria após uma prova de consistência dos axiomas. No entanto, este tipo de concepção envolve uma série de dificuldades. Uma delas foi a que Frege apontou envolvendo as provas de consistência e a noção de modelo. Hilbert também havia percebido, muito cedo, que a utilização de modelos no estabelecimento de teorias dedutivas possuía limitações bastante sérias. A saída deste impasse foi a *teoria da prova* e o surgimento das chamadas "provas absolutas de consistência". A idéia era a de utilizar unicamente procedimentos de natureza sintática e com isto dispensar o recurso a modelos para o estabelecimento da consistência das teorias matemática mais importantes. No entanto, para que tais provas fossem significativas do ponto de vista epistemológico, Hilbert teve que introduzir um domínio bastante especial de objetos:

11 Mesmo neste caso, o uso do termo 'definição' não parece ser apropriado. Contudo, o exame de tal problema nos levaria para além da questão que está sendo examinada neste trabalho.

12 Ver, por exemplo, Skolem (1958), p.637.

> (...) Algo deve já estar dado a nossa faculdade de representação como pré-condição para o uso e aplicação tanto das inferências como das operações lógicas. Tais objetos teriam uma natureza discreta e não lógica e seriam acessíveis à intuição através da experiência imediata, independentemente de todo pensamento. (...) Ao adotar esta posição, os objetos da teoria dos números são para mim (...) os próprios signos cuja forma pode ser identificada por nós com generalidade e confiabilidade independentemente do lugar, do tempo e das condições especiais de sua produção, bem como de certas diferenças insignificantes na sua execução. Aqui reside a atitude filosófica que eu acredito ser necessária para a fundamentação da matemática pura, assim como para todo o pensamento científico, entendimento e comunicação de qualquer natureza. No princípio, eu poderia afirmar, está o signo (Hilbert, 1998, p 202).

Atualmente, há praticamente unanimidade quanto à identificação deste domínio com aquilo que, posteriormente, passou a ser conhecido sob a designação de "aritmética recursiva primitiva com variáveis livres". Assim, a teoria finitária dos números, devido a seu caráter concreto, à sua simplicidade absoluta, bem como o seu caráter imediato, constituía-se como ponto de partida para a obtenção de provas de consistência que não necessitariam do recurso a modelos de qualquer tipo.

Neste momento, já é possível detectar o primeiro problema. A existência das entidades no âmbito finitário não estariam na dependência de qualquer *prova de* consistência. Desta forma, é possível afirmar que, com o surgimento da teoria da *prova*, Hilbert reconheceu explicitamente as limitações que envolveriam a sua concepção de existência, a saber, a necessidade de pressupor a existência de certos tipos de objetos e relações para que as provas de consistência pudessem ser inteligíveis. É claro que tal manobra sempre foi vista por Hilbert e seus adeptos como sendo extremamente vantajosa tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista conceitual:

> A axiomática formal, também, requer tanto para efetuar suas deduções, como para a demonstração de não contradição, a utilização de um certo tipo de evidência. Contudo, aqui existe uma diferença essencial. A classe de evidência a ser utilizada não se fundamenta em uma relação específica do conhecimento com o domínio a ser investigado. Ao contrário, ela é a mesma para qualquer axiomatização, ou seja, é aquela forma primitiva de conhecimento que se

> constitui na condição prévia de toda investigação teórica exata (...) (Hilbert e Bernays, 1958, p.3).

No entanto, não é nada fácil entender uma proposta deste tipo. Fazer do âmbito finitário o lugar, por excelência, tanto da existência como da evidência matemática, é conferir uma importância injustificada aos procedimentos de natureza sintática. É extremamente duvidoso que tais procedimentos possam dar origem à simplicidade conceitual e à certeza absoluta tão caras ao programa formalista[13]. Além disso, o que o segundo teorema de incompletude de Gödel[14] mostrou, de uma forma definitiva, é que a existência de tal domínio não é suficiente para obter provas da existência das entidades tratadas pelas principais teoria matemáticas. Neste sentido, é possível perceber um conteúdo ontológico no resultado de Gödel, a saber, a concessão feita por Hilbert a concepção clássica sobre a existência matemática não é suficiente para garantir a aplicação de suas idéias para além do âmbito finitário.

Existe ainda outro problema, ligado à concepção dos axiomas como definições. Em teorias nas quais os axiomas são definições implícitas é necessário falar dos axiomas na sua totalidade pois cada um deles, à sua maneira, contribui para a definição das entidades básicas da teoria. Ora, é uma prática comum se discutir o conteúdo de um axioma separado dos demais princípios constitutivos da teoria ao qual ele pertence. Assim foi com o axioma das paralelas, o axioma da escolha, o princípio de indução, e muitos outros. Este fato parece indicar que a interdependência entre os axiomas de uma teoria não é aquela exigida pela concepção de Hilbert.

A partir de tais considerações, o que é possível afirmar a respeito das idéias de Hilbert a respeito da existência matemática? As conclusões são, basicamente, de dois tipos: as que envolvem a noção de existência matemática e aquelas que dizem respeito ao método axiomático.

No que diz respeito ao problema da existência matemática, é possível perceber que, concepções como a de Hilbert, que pretendem apelar para algum conceito mais básico para dar conta da existência matemática, estão

13 Analisei este problema em detalhes no capitulo 4 ("O Fracasso do Programa Formalista: Dificuldades na Concepção do Processo de Formalização") do trabalho que desenvolvi em 1990.

14 No artigo de 1931, é apresentado como sendo um corolário do primeiro teorema de incompletude e é formulado nos seguintes termos: a consistência de ...*N*... não é demonstrável em ...*N*..., supondo que ...*N*... seja consistente.

fadadas ao fracasso. Será sempre necessário postular a existência de um estoque mínimo de entidades a partir das quais as várias teorias matemáticas possam ser desenvolvidas. É claro que o problema sempre será o de determinar, exatamente, qual será este "estoque mínimo" necessário. O que os resultados obtidos por Gödel parecem indicar, de uma forma inequívoca, é que o âmbito finitário não é adequado nem quando estamos tratando da aritmética elementar.

A questão, no que diz respeito ao método axiomático, é bem mais complexa e sua análise, evidentemente, iria além do escopo deste trabalho. Contudo, é possível observar que a existência de modelos não standard para as diversas teorias de primeira ordem indicam que a concepção segundo a qual os axiomas seriam definições é completamente errônea. Assim, Skolem (1981), por exemplo, ao invés de concluir pela inadequação deste tipo de abordagem, adotou uma postura relativista em relação a noções centrais da teoria de conjuntos. No entanto, tal percurso não é o único e nem o mais desejável. Do ponto de vista conceitual, uma retomada da concepção clássica da axiomática parece ser a atitude mais sensata a ser adotada neste tipo de discussão.

Referências bibliográficas

Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. New York, Dover Publications Inc.

Euclides. (1956). *The Elements*. New York, Dover Publications Inc.

Frege, G. (1980). *Philosophical and Mathematical Correspondence*. (ed.). G. Gabriel, Chicago, The University of Chicago Press.

Gödel, K. (1986). *Collected Works*, vol. I. S. Feferman, J. Dawson, S. Kleene, G. Moore, R. Solovay e J. van Heijenoort (eds.). Oxford, Oxford University Press, Inc.

Hilbert, D. (1971). *The Foundation of Geometry*. La Salle, The Open Court Publishing Company.

————. (1902). "Mathematical Problems". *Bulletin of American Mathematical Society*, 8: 437-479.

————. (1998). "The New Grounding of Mathematics" em P. Mancosu (ed.).

From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford, Oxford University Press, Inc., pp.198-214.

Hilbert, D. e Bernays, P. (1958). *Los fundamentos de la matematica*. (manuscrito), trad. José Goldstein.

Skolem, T. (1958) "Une relativisation des notions mathématiques fondamentales" em Fenstad, J., (ed.). *Selected Works in Logic*. Oslo-Bergen-Tromsö, Universitetsforlaget, 1970, pp.633-38.

————. (1981) "Some Remarks on Axiomatized Set Theory" em Heijenoort, J. van., (ed.). *From Frege to Gödel, 1879-1931*. Cambridge, Harvard University Press, pp.290-301.

Suppes, P. (1957) *Introduction to Logic*. Princeton, D. van Nostrand Company, Inc.

————. (1972). *Axiomatic Set Theory*. New York, Dover Publications, Inc.

Viero, A. (1990) *Sistemas Axiomáticos Formalizados: A Questão da Desinterpretação e da Formalização da Axiomática*. Rio de Janeiro, PUC.