Arno Viero*

Conhecimento e Estruturas Matemáticas

A idéia de que o domínio de investigação da matemática seria certos tipos de estrutura está longe de constituir uma novidade para quem estiver disposto a examinar, com cuidado, os vários desenvolvimentos desta ciência, desde a segunda metade do século passado. Em particular, os trabalhos realizados por Hamilton, Grassmann e Dedekind atestam o surgimento crescente de uma concepção que via, nas estruturas, o domínio de estudo da matemática.

No século XX, tal concepção foi defendida e implementada de forma bastante engenhosa e abrangente, pelos integrantes do grupo de Bourbaki. Segundo tais matemáticos, a própria noção de *estrutura* seria o conceito fundamental através do qual seria possível unificar a totalidade da matemática. Haveria três tipos de estruturas que se prestariam a este papel: *as estruturas algébricas*, *as estruturas topológicas* e *as estruturas ordinais*. Ao contrário dos matemáticos do século XIX, Bourbaki defendia uma postura bem mais abrangente em relação ao papel de tais entidades no desenvolvimento das várias teorias matemáticas. Para este grupo, toda disciplina matemática, de uma forma ou de outra, trataria de investigar e desenvolver os vários aspectos de algum tipo de estrutura matemática específica.

Na década de 60, o *estruturalismo* ganhou um impulso bastante forte quando Benacerraf publicou, em 1965, um artigo intitulado "What Numbers Could Not Be". A finalidade deste trabalho era mostrar de que forma a concepção, segundo a qual a matemática trataria de objetos, seria insustentável. O argumento do artigo tem, como ponto de partida, a existência de várias reduções da aritmética à teoria de conjuntos. Assim, de acordo com von Neumann, o número 2 seria representado conjuntisticamente por $\{\phi, \{\phi\}\}$, ao passo que, para Zermelo, a representação dar-se-ia através de $\{\{\phi\}\}$.

* Departamento de Filosofia da UFF.

O problema levantado por Benacerraf é que se o número 2 é um conjunto, ele deve ser um conjunto específico, sendo assim, teríamos que escolher entre a representação de von Neumann e a de Zermelo. Em virtude de uma série de razões, entretanto, tal problema é incapaz de ter uma resposta satisfatória. A partir daí, Benacerraf conclui, em um primeiro momento, que os números não são conjuntos, para, em seguida, formular uma conclusão mais forte, a saber, que os números não seriam objetos.

Contudo, se os números não são objetos, do que trata a aritmética? O *estruturalismo*[1] surge, exatamente, para dar conta deste tipo de problema. Segundo tal concepção, a aritmética teria como tarefa a investigação da *estrutura* dos números naturais, ou seja, aquilo que existiria em comum a todo sistema de objetos que possuísse um elemento inicial e no qual se verificasse a relação de sucessor e o princípio de indução. Com isto, tanto a redução de von Neumann, como a de Zermelo seriam adequadas, o que tornaria irrelevante a indagação pela redução correta. A estrutura dos números naturais, enquanto tal, seria passível de uma série de exemplificações cuja única restrição seria preservar as relações entre os seus elementos.

Em 1997, S. Shapiro publicou um livro intitulado *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology* no qual pretendia articular a postura estruturalista de uma forma bastante abrangente, resolvendo alguns dos problemas mais sérios que envolvem tal concepção.

O objetivo deste artigo é examinar alguns aspectos desta proposta e, em particular, a sua tentativa de constituir uma epistemologia para o estruturalismo baseada na noção de *definição implícita*.

Na segunda parte de seu livro, Shapiro procura obter respostas satisfatórias às várias questões ligadas tanto à natureza quanto à existência de diversas estruturas matemáticas. A sua estratégia é apresentar uma noção de estrutura para, em seguida, listar uma série de axiomas que deverão determinar seu o comportamento. Assim, uma estrutura seria uma coleção de lugares, juntamente com um número finito de funções e relações que se verificariam entre estes lugares[2]. Os vários axiomas são, então, apresentados: um primeiro que garantiria a existência de pelo menos uma estrutura com um número infinito de lugares; outros axiomas referentes à subestruturas; uma versão do axioma de substituição; uma versão do *princípio de reflexão* e, finalmente, o princípio que, no entender de Shapiro, é o mais central de toda a sua teoria, a saber, *o*

1 Aqui estamos nos referindo, entre outros, aos trabalhos de Shapiro, Resnik e Hellman.
2 Shapiro(1997), p. 95.

princípio de coerência: se Φ é uma fórmula coerente da linguagem de segunda ordem, então existiria uma estrutura que satisfaz Φ[3].

Uma distinção central para tal teoria é aquela entre uma estrutura e um sistema de objetos que exemplifica a estrutura. Assim, os ordinais finitos de von Neumann constituiriam um sistema que exemplificaria a estrutura dos números naturais. Segundo esta perspectiva, os problemas levantados pelo artigo de Benacerraf indicam, no entender de Shapiro, um grande mal-entendido entre as noções de *estrutura* e de *sistema*. Quem coloca a questão a respeito da essência do número 2 esquece que o número dois é apenas um lugar em uma estrutura, o qual pode ser exemplificado de várias maneiras. Nenhuma de tais representações pode ser privilegiada em detrimento das demais, e este é um fato absolutamente central no entendimento do domínio de investigação da aritmética. Os números não seriam objetos cuja existência e propriedade poderia ser considerada independentemente da estrutura a qual eles pertencem. Ser um número natural é apenas ser um lugar em uma estrutura e, conseqüentemente, manter relações específicas com os demais lugares pertencentes a ela.

A questão que se coloca a seguir é a de saber de que forma teríamos acesso a tais entidades. A primeira solução, considerada por Shapiro, é aquela segundo a qual o acesso a certos tipos de estruturas seria possível através daquilo que ele denomina "reconhecimento de padrão" (*pattern recognition*)[4], ou seja, através do contato direto com um sistema que instanciasse tal estrutura. O problema que decorre de tal abordagem é que existiriam limites ao acesso a certos tipos de estruturas infinitas. Após considerar várias alternativas possíveis, o veredicto de Shapiro é muito claro:

> Contudo, tais abordagens para estruturas grandes são artificiais e *ad hoc*, uma vez que tais estruturas não seriam semelhantes àquelas estudadas na matemática. A última técnica para a apreensão de estruturas é a mais eficaz e, também, a mais especulativa e problemática (Shapiro, 1997, p. 129).

A técnica que Shapiro se refere é o recurso à noção de *definição implícita*[5]. Para ele, a utilização de tal expediente permitiria a descrição de uma estrutura,

3 *Ibid.*, pp. 93-95.
4 *Op. cit.*, p. 111.
5 A tentativa de solucionar o problema do conhecimento matemático através deste expediente está longe de ser uma inovação introduzida por Shapiro. Na década de 20, Schlick em seu livro *General Theory of Knowledge* (pp. 31-38) adota tal postura cuja origem ele atribui a Pasch e a Hilbert.

sem necessidade de termos acesso a nenhuma de suas instâncias. É claro que, dentro desta perspectiva, o primeiro passo a ser dado é estabelecer no que constitui um tal tipo de definição. No seu entender, o termo *definição implícita* é ambíguo[6], uma vez que possuiria dois sentidos distintos. De acordo com o primeiro deles, uma definição implícita pressuporia que todos os termos da linguagem possuem um significado preciso, menos aquele cujo significado está sendo estipulado pela definição. Por exemplo, "$c < 10$ e c é um número perfeito", constituindo, assim, uma definição implícita do número 6. Contudo, não é esta a concepção que interessa a Shapiro. Para ele, uma definição implícita seria uma caracterização simultânea de uma série de itens em termos de suas relações mútuas. Neste momento, é difícil evitar a imagem de um sistema de equações lineares a n incógnitas. As várias equações do sistema determinariam as suas soluções, se elas existem, de uma forma simultânea. Esta parece ser a contrapartida matemática mais próxima daquilo que Shapiro pretende caracterizar, apesar de que em momento algum do texto ele utilize de tal exemplo.

Na verdade, a solução apresentada por ele possui três componentes, a saber, 1. a utilização da noção de *definição implícita*; 2. a concepção segundo a qual os axiomas de uma teoria matemática deveriam ser considerados como definições; e, 3. a linguagem é eleita como sendo o instrumento epistemológico por excelência de acesso às estruturas matemáticas.

> Muitas destas técnicas epistêmicas sugerem uma forte relação entre o entendimento da linguagem e o conhecimento de estruturas. Isto é especialmente verdadeiro para as definições implícitas. Pois, ao menos no campo da matemática pura, apreender uma estrutura e entender a linguagem de sua teoria é a mesma coisa. No entendimento de uma estrutura e na habilidade de se referir aos seus lugares não existe nada além da capacidade de se usar a linguagem corretamente. Uma estrutura não é determinada pelos seus lugares, considerados isoladamente, mas através das *relações* entre os seus lugares. Na verdade, o uso correto da linguagem *determina* quais relações existem. (...) Assim, a linguagem fornece um acesso epistêmico às estruturas matemáticas (Shapiro, 1997, p. 137)

Contudo, se os axiomas são concebidos como definições, dois problemas centrais se colocam. Em primeiro lugar, como saber se aquilo que é definido

---

6 *Op. cit.*, nota 15, p. 130.

realmente existe? Outro problema é o de saber se a definição em questão determina o seu objeto de forma unívoca. O ideal, do ponto de vista do funcionamento das definições, seria que a entidade definida existisse e, ao mesmo tempo, fosse única. Estes dois problemas receberão, por parte de Shapiro, uma longa análise que no final acabará se mostrando insatisfatória, sob diversos aspectos.

Quanto ao primeiro problema, a ameaça que surge, de uma forma bastante natural, é da existência de modelos não standard que fica assegurada através das várias versões do *teorema de Löwenheim-Skolem*[7]. A resposta de Shapiro a esta questão já estava delineada na elaboração da sua teoria das estruturas, ou seja, a adoção da lógica de segunda ordem como sendo o aparato dedutivo mais adequado para o desenvolvimento de suas idéias estruturalistas. No âmbito das teorias de segunda ordem, não existe nenhum análogo ao *teorema de Löwenheim-Skolem*, o que permite que tais teorias possuam a propriedade de serem categóricas[8].

No que diz respeito à questão do critério de existência, o problema é bem mais complexo, e isto devido a razões bastante específicas. Como saber se a estrutura definida pelos axiomas realmente existe? A resposta é elaborada através daquilo que Shapiro denomina *princípio da coerência*, conforme, mencionado anteriormente. O problema que se coloca é o de fornecer uma interpretação adequada à noção de *coerência*. Sem isto, toda a construção elaborada por Shapiro corre o risco de degenerar em uma concepção formalista da matemática o que, evidentemente, é visto por ele como sendo uma conseqüência altamente indesejada, em virtude da sua postura realista em relação às estruturas matemáticas.

A saída mais natural para tal questão parece ser a interpretação da noção de *coerência*, em termos de consistência definida, em termos dedutivos. Ora, o teorema de completude da lógica de primeira ordem estabelecido por Gödel[9], em 1929, parece dar suporte a tal abordagem. Uma das possíveis leituras de

---

7 A formulação mais usual deste teorema é: Se T é um conjunto consistente de sentenças de primeira ordem, então T possui um modelo finito ou um modelo infinito enumerável. No entanto, existe a versão *downward* (seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem de cardinalidade κ e seja $\kappa < \lambda$. Se Γ tem um modelo de cardinalidade λ, então Γ tem um modelo de cardinalidade κ', onde $\kappa \leq \kappa' < \lambda$) e a versão *upward* (seja Γ um conjunto de sentenças de uma linguagem de cardinalidade κ, sendo que Γ tem modelos de cardinalidade λ, sendo $\kappa \leq \lambda$. Para cada $\mu > \lambda$, Γ possui um modelo de cardinalidade μ).

8 Uma teoria T é dita ser categórica se e somente se todos os seus modelos forem isomórficos.

9 Este resultado estabelece que toda fórmula da lógica de primeira ordem ou é refutável ou é $\aleph_0$-satisfatível.

tal teorema é a afirmação de que todo conjunto de sentenças, dedutivamente consistente, possui um modelo. Como foi mostrado acima, o problema é que tal resultado não se verifica para a lógica de segunda ordem, manobra central, como para Shapiro contornar o problema da unicidade das estruturas. No âmbito da lógica de segunda ordem, é possível encontrar conjuntos de sentenças que, apesar de consistentes, não possuem modelo. Um destes exemplos[10] é fornecido pelo próprio Shapiro: se acrescentarmos ao conjunto de sentenças formado pelos axiomas da aritmética de Peano de segunda ordem a negação da sentença de Gödel, que afirma a consistência deste sistema, obteremos um conjunto consistente e que, no entanto, não possui modelo algum. Este fato bloqueia por completo a interpretação da noção de *coerência* em termos de consistência. A consistência de uma teoria não é um critério suficiente para estabelecermos que seus axiomas definem ou descrevem uma estrutura existente.

A outra alternativa considerada por ele seria a de recorrer à noção de *fórmula satisfatível* para interpretar a noção de *coerência*. Dizer que a fórmula Φ é satisfatível é afirmar que existe um modelo para Φ. Contudo, tal manobra seria equivalente a reduzir à questão da coerência de uma teoria, a coerência da teoria de conjuntos; isso porque, afirmar que existe um modelo para a fórmula Φ equivale a fazer uma afirmação sobre a hierarquia do universo da teoria de conjuntos. Agora, o que nos garantiria que a teoria de conjuntos, por sua vez, é coerente? A resposta de Shapiro a este problema é clara, porém insuficiente:

> Este círculo, envolvendo a lógica de segunda ordem e as definições implícitas, não é vicioso e é possível de se conviver com ele. Considero a noção de "coerência" como sendo um primitivo, uma noção intuitiva que não é passível de ser reduzida a algo formal (...) (Shapiro, 1997, p. 135).

Após este rápido exame das idéias de Shapiro a respeito da constituição de uma epistemologia para o estruturalismo, várias questões se colocam. Existem problemas bastante sérios quando se trata de entender a noção de *definição implícita* que, por razões bastante específicas, desautorizam o recurso a tal noção no momento em que se pretende estabelecer uma teoria como a pretendida por Shapiro. Tais problemas são uma decorrência direta do entendimento do que seja uma definição e dos pré-requisitos que elas devem satisfazer no desenvolvimento de uma teoria matemática.

---

10 *Op. cit.*, p. 135.

Em primeiro lugar, uma definição jamais é verdadeira ou falsa. Trata-se apenas de uma estipulação que simplifica o desenvolvimento da teoria, facilitando os procedimentos dedutivos. Desta forma, a princípio todas as definições são dispensáveis. Aliás, na *Teoria da Definição*[11], diz-se que toda e qualquer definição deve apresentar duas características básicas, a saber, a da *eliminabilidade* e a da *não criatividade*. A exigência do cumprimento de tais condições, simplesmente, indica que tudo aquilo que é possível de ser obtido com o auxílio de uma definição pode ser obtido, igualmente, sem o seu recurso.

Ora, no momento em que se concebe os axiomas como certas definições, vários problemas colocam-se a partir daquilo que acaba de ser exposto, em particular, no que diz respeito à noção de *prova*. A prova é um instrumento de conhecimento pelo simples fato de, através do seu recurso, podermos estabelecer resultados verdadeiros (*os teoremas*) desconhecidos até então. Mas, para que isso ocorra, a prova deverá, sempre, partir de premissas verdadeiras. Uma vez que este raciocínio seja levado suficientemente longe, chegamos à conclusão de que a prova deve partir, em última análise, de premissas não provadas e que sejam verdadeiras (*os axiomas*). Como compatibilizar a noção de prova como instrumento de conhecimento e a concepção de que os axiomas são *definições implícitas* dos termos e das relações primitivas do sistema? A conclusão a que chegamos é que a proposta de Shapiro para se entender a natureza dos axiomas destrói a prova como instrumento de conhecimento matemático, ou seja, um começo nada promissor para alguém que tem o objetivo de constituir uma epistemologia para a matemática.

Além disso, como aplicar aos axiomas, entendidos como definições, os requisitos de eliminabilidade e não criatividade? Isto é simplesmente impossível e por uma razão muito simples: os axiomas não são definições! Eles não podem ser eliminados porque formam a base da relação de demonstrabilidade a partir da qual a verdade dos teoremas é estabelecida. Neste sentido, os axiomas possuem um caráter criativo. Através deles é que as noções e conceitos básicos do sistema são introduzidos.

Outro inconveniente ligado às definições implícitas diz respeito à noção de *significado*. Ora, que através deste recurso não se possa estabelecer o significado de todos os termos primitivos de um sistema era um fato que estava muito claro, inclusive para Gergonne (1771-1859), quem, pela primeira vez, formulou a noção de *definição implícita*:

11 Ver, por exemplo, Suppes (1972) cap. 2.

> (...) se uma frase contém uma única palavra cujo significado nos é desconhecido, o enunciado desta frase poderá ser suficiente para nos revelar o seu significado. Se, por exemplo, dizemos a alguém que conhece o significado das palavras triângulo e quadrilátero, mas que desconhece a palavra diagonal, que cada uma das duas diagonais de um quadrilátero o divide em dois triângulos, ele entenderá no que se constitui uma diagonal. (...) Poderíamos também imaginar que duas frases contendo duas palavras novas, combinadas com outras previamente conhecidas, poderiam nos ajudar a entender o sentido destas duas palavras (Gergonne, em: Enriques, 1949, p. 129).

Na terminologia estabelecida pelo próprio Shapiro isto seria equivalente a admitir somente definições do tipo "$c < 10$ e c é um número perfeito" para definir o número 6, por exemplo. Contudo, como foi visto, esta concepção de *definição implícita* não é aquela que Shapiro considera fundamental para os seus propósitos. Aliás, afirmar que o enunciado acima define o número 6, parece revelar uma falta de compreensão do que está acontecendo com tal definição. Neste caso, poderíamos afirmar que aquilo que está sendo definido é a propriedade de ser menor que 10 e ser, simultaneamente, um número perfeito. O que estaria em jogo seriam propriedades e não objetos, aliás uma interpretação muito mais de acordo com a postura estruturalista que Shapiro pretende estabelecer.

Evidentemente, este tipo de consideração cria vários problemas para a proposta de Shapiro. Um deles é a sua tentativa de estabelecer o conhecimento matemático como sendo *a priori*. No momento em que o acesso às estruturas é a linguagem, e as principais características desta, por sua vez, não podem ser completamente estabelecidas através do recurso a definições implícitas seremos obrigados a postular uma outra fonte de acesso a *significados* que, certamente, terão uma relação bastante estreita com a experiência sensível. Assim, as limitações intrínsecas de tal procedimento são um obstáculo bastante sério para o estabelecimento do conhecimento matemático como sendo *a priori*.

Aliás é interessante notar que os positivistas lógicos[12], de uma forma muito coerente, utilizavam-se do expediente de *definições implícitas* não somente

---

12 Carnap em sua autobiografia (ver Schilpp, p. 21) reconhece que através do livro de Schlick, citado anteriormente, a idéia de introduzir conceitos através de definições implícitas acabou influenciando fortemente o trabalho de vários integrantes do Círculo de Viena. No entanto, tal procedimento foi criticado por vários de seus membros (ver, por exemplo, a quinta parte do artigo de Hempel (1945) intitulado "Mathematics as an Axiomatized Deductive System").

para estabelecer o caráter *a priori* do conhecimento matemático, como também para estabelecer o seu caráter *analítico*, ou seja, os enunciados matemáticos seriam verdadeiros não em virtude de uma realidade externa que eles descreveriam, mas sim devido a certas convenções lingüísticas estabelecidas na base do sistema. A pergunta que se coloca é: de que forma Shapiro, um realista convicto, poderia sustentar uma concepção analítica, deste tipo, em relação ao conhecimento matemático? Neste ponto, não seria um exagero afirmar que a proposta de Shapiro representa um retrocesso em relação àquela defendida pelos positivistas lógicos.

No que diz respeito à noção de *coerência*, Shapiro comete um equívoco semelhante àquele cometido por Hilbert ao tentar dar conta da existência matemática através da noção de *consistência*. É como se, a partir unicamente da teoria, fosse possível determinar quais são as entidades que compõem o seu domínio de investigação. Na fase mais madura do programa formalista de fundamentação, a introdução do âmbito finitário pode ser considerada como sendo o reconhecimento, por Hilbert, que a partir da teoria é impossível estabelecer a existência de todos os elementos componentes do seu domínio. Shapiro se encontra em uma situação semelhante e, em um certo sentido, pior do que a de Hilbert. Shapiro apela à teoria de conjuntos para resolver as questões relativas às estruturas matemáticas e, no entanto, a própria noção de estrutura é utilizada na categorização da teoria de conjuntos. É claro que é possível se conviver com uma tal situação que, evidentemente, nos faz avançar muito pouco no entendimento das principais questões ligadas aos vários problemas epistemológicos envolvendo a matemática.

Este rápido exame das idéias de Shapiro mostra de uma forma bastante clara que, por mais atraente que seja a idéia de que a matemática trata de estruturas, vários problemas centrais, relacionados a tal concepção, estão longe de ter um tratamento adequado. No caso da epistemologia a idéia de se recorrer à noção de *definição implícita* parece ser particularmente improdutiva. Ao contrário do que Shapiro afirma em seu livro[13], estruturalismo e definições implícitas não possuem afinidade alguma.

---

13 *Op. cit.*, p. 130.

Referências Bibliográficas

Benacerraf, P. e Putnam, H (1983) (eds.). *Philosophy of Mathematics*. (Cambridge, Cambridge University Press).

Benacerraf, P (1965). "What Numbers Could Not Be", em *Philosophy of Mathematics*: 295-314.

Bourbaki, N. (1950). "The Architecture of Mathematics". *American Mathematical Monthly*, 57: 221-33.

___________. (1994). Elements of The History of Mathematics. (New York, Springer-Verlag).

Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. (New York, Dover Publications Inc).

Enriques, F. (1949). *Para la Historia de la Logica*. (Buenos Aires, Espasa-Calpe Argentina S.S).

Hellman, G. (1989). *Mathematics Without Numbers*. (Oxford, Clarendon Press).

Hempel, C. (1945). "On the Nature of Mathematical Knowledge". *American Mathematical Monthly*, 52: 543-56.

Hilbert, D. (1971). *The Foundation of Geometry*. (La Salle, The Open Court Publishing Company).

Schilpp, P (1963) (ed.). *The Philosophy of Rudolf Carnap*. (La Salle, The Open Court Publishing Company).

Schlick, M (1974). *General Theory of Knowledge*. (New York, Springer-Verlag).
Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. (New York-Oxford, Oxford University Press).

Suppes, P. (1972). *Axiomatic Set Theory*. (New York, Dover Publications).

Resnik, M (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. (Oxford, Clarendon Press).