Frank Sautter*

O Papel das Classes Próprias na Fundamentação das Ciências Formais

Há quase cinqüenta anos atrás Azriel Lévy[1] publicou um trabalho no qual analisa o papel das classes próprias na fundamentação da matemática. Proponho-me, aqui, a estender essa discussão ao âmbito dos fundamentos da lógica. Apóio-me, em grande medida, na concepção de Kurt Gödel do objeto de investigação da matemática, do objeto de investigação da lógica, e das relações existentes entre estas ciências.

A tabela abaixo foi obtida a partir de informações constantes do Capítulo 8, *Teoria dos Conjuntos e Lógica como Teoria dos Conceitos*, do livro póstumo de Hao Wang *Uma Jornada Lógica: de Gödel à Filosofia* (Wang, 1996). Nesse capítulo Wang relata diversas conversas que manteve com Gödel, nas quais este compara dois casos paradigmáticos de ciências formais: a matemática e a lógica.

Matemática	Tópico	Lógica
Conjuntos (puros)	Objeto de investigação	Conceitos (puros)
Pertinência	Operação fundamental	Aplicação
Obediência à boa fundação e à extensionalidade	Caracterização por princípios	Violação à boa fundação e à extensionalidade
Gerar e usar	Objetivo	Fundamentar
Concepção iterativa e hierarquia cumulativa	Critério de existência	(Grafos-ponto acessíveis)

Tabela única: Casos paradigmáticos de ciências formais.

* Departamento de Filosofia da UFSM-RS.

1 O texto original de Lévy (1976) encontra-se em Fraenkel, A. A.; Bar-Hillel, Y.; Lévy, A. (Orgs.) *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North Holland, 1958. Utilizo, neste artigo, a paginação da republicação.

Essa comparação entre lógica e matemática tem início com a determinação dos objetos de investigação destas disciplinas. Segundo Gödel, "o tema da lógica são as intensões (conceitos); o tema da matemática são as extensões (conjuntos)" (*apud* Wang, 1996, p. 274). O qualificativo "puro", que consta da tabela, significa simplesmente que os únicos constituintes dos conjuntos de que trata a matemática são, por sua vez, também conjuntos (puros) e, igualmente, os únicos constituintes dos conceitos de que trata a lógica são, por sua vez, também conceitos (puros). Gödel segue com a comparação ao determinar as relações existentes entre conceitos e conjuntos. Ele conjectura que o enunciado "a cada conjunto corresponde um conceito" é verdadeiro, embora precise ser demonstrado, uma vez que a verdade do enunciado não é evidente a partir dos próprios conceitos de conjunto e de conceito (*apud* Wang, 1996, p. 274)[2]. Por outro lado, "geralmente o domínio de aplicabilidade de um conceito não precisa formar um conjunto" (*apud* Wang, 1996, p. 274). Por exemplo, o conceito 'conceito que não se aplica a si mesmo' não tem extensão (consistente). Disso se conclui que, se estas relações entre conjuntos e conceitos estão corretas e se Gödel está correto quanto aos objetos de investigação da lógica e da matemática, a lógica tem um escopo mais amplo do que a matemática.

Gödel prossegue com a comparação entre lógica e matemática. Segundo ele, "assim como a teoria dos conjuntos é formulada no cálculo de predicados pela adição da relação de pertinência, a teoria dos conceitos pode ser similarmente formulada pela adição da relação de aplicação [...]" (*apud* Wang, 1996, p. 277).

Há, porém, diferenças significativas entre conjuntos e conceitos: enquanto que conjuntos obedecem aos princípios de boa fundação e de extensionalidade, quer dizer, conjuntos não podem pertencer a si próprios[3] e conjuntos (puros) aos quais pertencem os mesmos conjuntos são idênticos, conceitos violam tanto o princípio de boa fundação como o princípio de extensionalidade, quer dizer, há conceitos autoaplicáveis e conceitos (puros) aplicáveis aos mesmos conceitos podem não ser idênticos (Wang, 1996, p. 275, 278). Esta última afirmação, segundo a qual conceitos violam o princípio de extensionalidade, contradiz o texto *A Lógica Matemática de Russell* no

2 Gödel afirma também que "não é uma confusão dizer que conjuntos somente podem ser definidos por conceitos ou que conjunto é um modo determinado de falar acerca de conceitos." (*apud* Wang, 1996, p. 276)

3 O princípio de boa fundação diz algo mais forte do que a mera não autopertinência, mas, para os propósitos aqui considerados, é suficiente ter em conta esta conseqüência do princípio de boa fundação.

qual Gödel (1990)[4] afirma exatamente o oposto. Gödel, portanto, alterou sua concepção acerca de conceitos entre 1944, quando o texto em homenagem a Bertrand Russell foi publicado, e o início da década de 70, época dos diálogos entre ele e Wang.

Finalmente, a diferença entre matemática e lógica não é, segundo Gödel, apenas uma diferença quanto à amplitude do escopo, mas também uma diferença quanto aos objetivos pretendidos: "matemáticos formam e utilizam conceitos, mas eles geralmente não investigam como os conceitos são formados, isto é feito pela lógica" (*apud* Wang, 1996, p. 274).

Uma questão em aberto nesta comparação entre matemática e lógica diz respeito ao critério de existência de conceitos. Segundo Gödel, a concepção iterativa dos conjuntos e o universo de conjuntos dela resultante, a hierarquia cumulativa, é suficiente para a atividade do matemático, mas ainda não há uma concepção análoga a respeito dos conceitos, adequada para a fundamentação da atividade do lógico (Wang, 1996, p. 270)[5]. Classes próprias constituiriam um primeiro passo em direção a essa almejada concepção.

Gödel explica que as classes próprias surgem da tentativa de extensionalizar conceitos aos quais não corresponde conjunto algum (Wang, 1996, p. 275). Classes próprias são, segundo Gödel, "uma conveniência híbrida derivada, introduzidas como um meio para falar a respeito de alguns aspectos dos conceitos. Uma classe própria é um objeto impróprio (*uneingentlich Gegenstand*), não é nada em si mesma. Em sentido estrito não se deve falar de uma classe [própria]: ela é apenas um meio para falar sobre conceitos que se aplicam ao mesmo domínio de coisas" (*apud* Wang, 1996, p. 275). Esta concepção de Gödel, na qual classes próprias desempenham um papel secundário, em que são utilizadas tão somente na caracterização de outras entidades, a saber, na caracterização de conceitos, também está presente nas aplicações que os demais lógicos lhes deram, com uma diferença importante: enquanto que para Gödel as outras entidades caracterizadas por intermédio das classes próprias são conceitos, para a grande maioria dos lógicos contemporâneos essas outras entidades são conjuntos. Por exemplo, na axiomática de Johannes Von

4 O texto original de Gödel (1990) encontra-se em Schilpp, P. (Org.) *The Philosophy of Bertrand Russell*. Evanston: Northwestern University, 1944.

5 A teoria dos conjuntos mal-fundados, teoria dos hiperconjuntos, de Peter Aczel (1988), pode ser uma opção de análogo, para conceitos, da concepção iterativa e a resultante hierarquia cumulativa. Há, porém, diversos problemas que precisam ser contornados para que se torne uma alternativa viável. Por exemplo, falta pautar a escolha entre diferentes propostas de critérios de identidade para conjuntos mal-fundados baseadas em decoração de grafos-ponto acessíveis tais como as propostas de Boffa, Forti e Honsell, Aczel, Scott. Ver (Hart, 1992).

Neumann — Paul Bernays, elas vêm a ser empregadas na obtenção de uma teoria dos conjuntos finitamente axiomatizável; e em *Teoria dos Conjuntos e sua Lógica*, Willard van Orman Quine (1963) propõe que enunciados envolvendo classes próprias sejam considerados abreviações de enunciados envolvendo apenas conjuntos. Essa prática dos lógicos contemporâneos levou Lévy (1976, p. 177) a afirmar que "teorias dos conjuntos com classes [próprias] e teorias dos conjuntos somente com conjuntos não são duas teorias distintas, elas são, essencialmente, diferentes formulações da mesma teoria subjacente". Na continuidade, vou reconstruir a história "oficial" das classes próprias e analisar esse papel que elas desempenham com respeito às teorias dos conjuntos.

A distinção entre conjunto e classe própria data de pelo menos 1899 quando, em uma série de cartas a Richard Dedekind, Georg Cantor utiliza a seguinte caracterização: "Por um lado, uma multiplicidade pode ser tal que a suposição de que todos os seus elementos 'estão juntos' leva a uma contradição, de tal modo que é impossível conceber a multiplicidade como uma unidade, como uma 'coisa acabada'. Tais multiplicidades eu as denomino multiplicidades absolutamente infinitas ou inconsistentes" (*apud* Hallett, 1984, p. 166). As multiplicidades inconsistentes correspondem ao que hoje em dia denominamos classes próprias. Na continuidade Cantor afirma, "Quando, por outro lado, a totalidade dos elementos de uma multiplicidade pode ser pensada sem contradição como 'estando juntos', tal que sua coleção em 'uma coisa' é possível, eu a denomino multiplicidade consistente ou conjunto." (*apud* Hallett, 1984, p. 166). É importante salientar que Gödel utilizará esta distinção em apoio ao seu objetivismo em matemática: "Essa propriedade significativa de determinadas multiplicidades — que elas são unidades — deve vir de um fundamento mais sólido do que o fenômeno aparentemente trivial e arbitrário que podemos ter uma visão panorâmica [*overview*] dos objetos em cada uma dessas multiplicidades. Sem o quadro [picture] objetivo, parece que não somos capazes de excluir a completa arbitrariedade na determinação de quando uma multiplicidade pode ser pensada junta e quando não pode. De fato, sem o quadro objetivo nada parece nos prevenir de acreditar que toda multiplicidade pode ser pensada como estando junta. Agora, como sabemos, quando o fazemos caímos em contradições. Algumas pluralidades podem ser pensadas juntas como unidades, algumas não podem. Portanto, deve haver algo objetivo na formação de unidades" (*apud* Wang, 1996, p. 260). Gödel também esclarece, em carta a Stanislaw Ulam de *circa* 1950, que a distinção entre conjuntos e classes próprias opera segundo um princípio maximal de tal maneira que "[...] todo conjunto que, de um determinado modo bem definido, não implica em contradição existe" (*apud* Wang, 1996, p. 262).

Além da caracterização de classe própria, Cantor também fornece um "critério" para a distinção entre conjuntos e classes próprias em carta a Dedekind datada de 28 de julho de 1899: "Duas multiplicidades equivalentes ou são ambas 'conjuntos' ou são ambas inconsistentes" (*apud* Hallett, 1984, p. 168). Von Neumann enuncia, em carta dirigida a Ernst Zermelo, carta datada de 15 de agosto de 1923, este critério da seguinte forma: "um 'conjunto' é 'muito grande' se e somente se ele é equivalente ao conjunto de todas as coisas" (*apud* Hallett, 1984, p. 288). Este critério para a distinção entre conjuntos e classes próprias estabelecerá o modo particular de tratamento das antinomias da teoria dos conjuntos adotado por von Neumann e todos aqueles que empregam classes próprias, por contraste ao tratamento adotado por Zermelo e todos aqueles que empregam tão somente conjuntos. Ambos, Zermelo e von Neumann, adotam o que, na literatura, é denominada "doutrina da limitação de tamanho" na prevenção das antinomias. Axiomatizações ao estilo de Zermelo evitam as antinomias ao pura e simplesmente não admitirem multiplicidades muito grandes, ao não admitirem classes próprias; axiomatizações ao estilo de von Neumann o fazem não permitindo que multiplicidades muito grandes, as classes próprias, pertençam a outras multiplicidades. Lévy (1976, p. 195) sintetizou a situação do seguinte modo: "[...] a doutrina da limitação de tamanho é retida por von Neumann, mas somente no sentido de que conjuntos muito grandes não podem ser membros de conjuntos, e não no sentido de que tais conjuntos devem ser de todo evitados".

Passemos agora à crítica da proposta de von Neumann. Ela parece ser bastante insatisfatória porque, como Lévy (1976, p. 201) coloca a questão, "embora [segundo a proposta de von Neumann] classes próprias sejam objetos reais, coleções de classes próprias não existem. A existência de objetos matemáticos reais que não podem ser membros de nenhum conjunto finito é assunto bastante peculiar [...]". Para o esclarecimento desta passagem, considere o seguinte exemplo: seja V a coleção dos objetos idênticos a si próprios; na teoria de von Neumann nem {V} nem $\wp$(V) são conjuntos ou classes próprias[6].

6 A concepção de Gödel acerca da realidade das classes próprias é similar a esta leitura que Lévy faz da concepção de Von Neumann: "Classes [próprias] podem, porém, também ser concebidas como entes reais, a saber, como 'pluralidades de coisas' ou como estruturas consistindo de uma pluralidade de coisas existindo independentemente de nossas definições e construções" (*apud* Wang, 1996, p. 275).

Em outra passagem, Lévy (1976, p. 173) recorrerá à concepção cantoriana de conjunto, segundo a qual qualquer objeto pode ser empregado como elemento de um conjunto, para inferir que na abordagem de von Neumann classes próprias não são objetos.

Mas será preciso negar a realidade das classes próprias para preservar a definição cantoriana de conjunto? A resposta parece ser negativa e, para sustentá-la, baseio-me em uma axiomatização da teoria dos conjuntos proposta por Wilhelm Ackermann em 1956. A axiomática de Ackermann (1956) retém uma forma fraca da doutrina da limitação de tamanho segundo a qual os elementos de um conjunto são conjuntos e as subclasses de um conjunto são conjuntos, admitindo, portanto, a pertinência de uma classe própria a uma classe própria, assim como uma classe própria estar contida em uma classe própria. Se recorremos à coleção V dos objetos idênticos a si próprios, tem-se que tanto {V} como $\wp(V)$ são classes próprias, diferente daquilo que havíamos obtido na teoria de von Neumann (nem {V} nem $\wp(V)$ são classes próprias, muito menos conjuntos). A proposta de Ackermann amplia a proposta de von Neumann e a aproxima da proposta de Gödel, quer dizer, ao mesmo tempo classes próprias, na teoria proposta por Ackermann, são utilizadas para esclarecer a noção cantoriana de conjunto (o universo dos conjuntos nas teorias de Zermelo-Fraenkel e de Ackermann são idênticos!), mas também pode ser empregada no esclarecimento da noção de conceito ao qual não corresponde nenhuma extensão (consistente), desde que, com ela, é possível tratar, por exemplo, dos conceitos relacionados a {V} e a $\wp(V)$. A teoria dos conjuntos de Ackermann merece um estudo mais detalhado de todo aquele que sonha com uma concepção de lógica nos moldes em que Gödel a concebeu. O próprio Gödel expressou esse projeto visionário, projeto que apesar de sua reconhecida capacidade ele não conseguiu concluir, da seguinte maneira: "Ir além dos conjuntos vêm a ser um passo compreensível e, de fato, necessário para uma concepção abrangente ampla da lógica. Retornamos ao programa de desenvolvimento de uma *grand* lógica, exceto que não estamos mais perturbados pelas conseqüências da confusão entre conjuntos e conceitos" (*apud* Wang, 1996, p. 277). Podemos, é claro, discordar da concepção de lógica proposta por Gödel, mas não ignorá-la, pois ela é promissora para a elucidação da natureza do conceito de conceito.

Bibliografia

Ackermann, W. "Zur Axiomatik der Mengenlehre". Em: *Mathematische Annalen*, v. 131, 1956, pp. 336-345.

Aczel, P. *Non-well-founded sets. CSLI Lecture Notes n. 14*. Stanford: CSLI, 1988.

Chateaubriand, O. *Logical Forms. Part I — Truth and Description*. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2001.

Gödel, K. "Russell's Mathematical Logic". Em Feferman, S. *et alii*. *Collected works: volume II. Publications 1938-1974*. New York: Oxford, 1990.

Hallett, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon, 1984.

Hart, W.D. "On non-well-founded sets". Em: *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, v. 24, n. 72, 1992, pp. 3-21.

Lévy, A. "The Role of Classes in Set Theory". Em: Müller, G. H. (ed.) *Sets and Classes: on the Work by Paul Bernays*. Amsterdam: North-Holland, 1976.

Quine, W. O. *Set theory and its logic*. Cambridge: Harvard, 1963.

Wang, H. *A logical journey: from Gödel to philosophy*. Cambridge: The MIT Press, 1996.