

Intención y Conflicto: sobre la Interpretación de la Negación en el Intuicionismo Matemático¹

Resumo

Devido à rejeição do princípio do terceiro excluído, a interpretação da negação foi uma tarefa fundamental para o desenvolvimento do intuicionismo. L. E. J. Brouwer baseou sua elucidação da negação nos conceitos de absurdo e de contradição. Esta elucidação influiu na evolução posterior da lógica intuicionista. Neste trabalho analiso em primeiro lugar a caracterização da negação proposta por Arendt Heyting a partir da teoria do significado de Husserl tal como ela foi aplicada os enunciados matemáticos por Oskar Becker. Em segundo lugar, mostro alguns problemas que surgem desta interpretação e os vinculo com as críticas de G.E.C. Griss ao conceito brouweriano de negação. Como resultado, esboçam-se as limitações que teve a teoria husserliana do significado para desenvolver uma semântica intuicionista, e põe-se em destaque a necessidade de contar com uma elucidação satisfatória do conceito de demonstração hipotética.

Palavras chave: Lógica intuicionista . Constantes lógicas . Teoria do significado de Husserl . Oskar Becker

- 1 Partes de este trabajo fueron expuestas en una mesa redonda sobre negación intuicionista en el VII *Coloquio Conesul. Filosofia das Ciências Formais*. Santa Maria (Brasil), 16-19 de noviembre, 2003 y también en el XI *Coloquio Conesul de Filosofia das Ciências Formais – “Negação”*, Santa Maria, RS, Brasil, 14-18 de noviembre de 2007. Quiero agradecer a Jorge Molina y a Wagner Sanz por las discusiones sostenidas reiteradas veces sobre el tema, y a Jairo da Silva y a Abel Lassalle Casanave por sus observaciones a versiones anteriores.
- 2 Professor do Departamento de Humanidades. Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires. Pesquisador do CONICET (CEF-ANCBA). E-mail: jlegris@mail.retina.ar.

Abstract

Due to the rejection of the principle of excluded middle, the interpretation of negation was a fundamental task in the development of intuitionism. L. E. J. Brouwer based his elucidation of negation on the notions of absurd and contradiction. This elucidation was influential in the later evolution of intuitionistic logic. In this paper, I discuss firstly the characterization of negation made by Arendt Heyting based on Husserl's theory of meaning, as applied to mathematical statements by Oskar Becker. Secondly, I show some problems emerging from this interpretation and I connect them with G.F.C. Griss' idea of a negationless mathematics. As a result, the limitations of applying Husserl's theory of meaning to the development of an intuitionistic semantic are sketched, and the need of a satisfactory explication of the notion of hypothetical proof is stressed.

Keywords: Intuitionistic logic . Logical constants . Husserl's theory of meaning . Oskar Becker

En la llamada interpretación BHK de las constantes lógicas, la negación se caracteriza como sigue (véase Troelstra & van Dalen 1988, p. 9).

El absurdo (contradicción) no tiene demostración; una demostración de $\neg A$ es una construcción que transforma cualquier demostración hipotética de A en la demostración de una contradicción.

Aquí aparecen nociones esenciales para el intuicionismo como la de construcción. Respecto de la negación, los conceptos de *absurdo* o *contradicción* y de *demostración hipotética* son fundamentales. Se da por sentado que esta interpretación sigue ideas que estaban ya implícitas en L. E. J. Brouwer y que aparecieron explícitamente en obras de Arendt Heyting y Alexander Kolmogorov. De hecho, y pese a que no faltan objeciones, ha devenido la interpretación canónica para los intuicionistas (véase Troelstra & van Dalen 1988, p. 31).³ En lo que sigue me centraré en la caracterización de la negación que hizo Arendt Heyting a partir de la teoría del significado de Edmund Husserl, y mostraré algunos problemas que surgen de esta interpretación. Como consecuencia, se indicarán algunas limitaciones que tuvo la teoría husserliana del significado para desarrollar una semántica intuicionista, y se sugerirá la

³ De esta caracterización, resulta natural definir la negación como: $\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$.

importancia de contar previamente con una elucidación satisfactoria del concepto de demostración hipotética.

Brouwer se vio llevado casi desde un comienzo a proponer modificaciones en la lógica a causa de su peculiar posición sobre la naturaleza de las entidades matemáticas, que implicaba el rechazo del principio de tercero excluido ($A \vee \neg A$ en su formulación proposicional). Si bien nunca hizo un análisis de las constantes lógicas independiente de su uso concreto en la matemática, Brouwer apeló tanto a la idea de incompatibilidad entre construcciones matemáticas como a la idea de absurdo. Una exposición detallada de estas ideas se encuentra en el trabajo de Jorge Molina publicado en este volumen. Sobre la base de los planteamientos de Brouwer, se discutió la negación intuicionista de acuerdo con diferentes marcos elucidatorios. En su trabajo sobre el principio del tercero excluido Alexander Kolmogorov examinaba los axiomas para la negación presentados por Hilbert dos años antes, esto es:

$$\begin{aligned} & A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \\ (A \rightarrow B) & \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B). \end{aligned}$$

(véase Hilbert 1923). En cuanto al primero, que expresa el principio *ex falso quodlibet*, Kolmogorov sostiene que “no tiene ni puede tener fundamento intuitivo” ya que “afirma algo acerca de consecuencias de lo que es imposible, en el sentido de que debemos suponer B como verdadero, si se supone como falsa una proposición verdadera A” (Kolmogorov 1925, p. 46). Así, descarta su inclusión en la lógica intuicionista. Sin embargo, Arendt Heyting en su posterior axiomatización de la lógica intuicionista, incluyó este principio como el axioma X de su sistema, ofreciendo también una interpretación del mismo.⁴ El segundo axioma implica el principio del tercero excluido.

Posteriormente, Kolmogorov interpretó las constantes lógicas mediante el concepto de “problema”. Este concepto era entendido en el sentido de, por ejemplo, los problemas de la geometría, que exigen la construcción de figuras geométricas, siendo el mismo procedimiento de construcción el que da los elementos para solucionar el problema. Así, lo que se obtenía era una interpretación de la lógica como un cálculo de problemas, en el que las reglas lógicas válidas son esquemas de resolución de problemas (véase Kolmogorov 1932, p. 38).

4 Sobre este punto, véase van Atten 2005b.

Kolmogorov comenzaba afirmando:

Además de la lógica teórica, que sistematiza los esquemas de demostración de las verdades teóricas, se pueden sistematizar los esquemas de resolución de problemas [Aufgaben], por ejemplo problemas constructivos en la geometría. (Kolmogorov 1932, p. 58)

Es posible introducir un simbolismo correspondiente y dar las reglas formales de cálculo para la construcción simbólica del sistema de tales esquemas para la resolución de problemas. De este modo, se obtiene, junto con la lógica teórica un nuevo cálculo de problemas [Aufgabenrechnung]. [...] Entonces, se da el siguiente hecho sorprendente: En la forma, el cálculo de problemas coincide con la lógica intuicionista de Brouwer, recientemente formalizada por el señor Heyting. (Kolmogorov 1932, p. 58)

Así, las constantes lógicas se caracterizaban en términos de problemas. Si a y b son dos problemas, entonces $a \& b$ designa la tarea de “resolver ambos problemas a y b ”, mientras que $a \vee b$ designa el problema de “resolver al menos uno de los problemas a y b ”. Además, $a \rightarrow b$ es el problema de, “bajo el supuesto de que está dada la solución de a , resolver b ”, o, lo que significa lo mismo, de “reducir la solución de b a la solución de a ”. (Kolmogorov 1932, p. 59). En particular, la caracterización de la negación surge a partir de la existencia de problemas contradictorios. Así $\neg a$ se interpreta como el problema de, “bajo el supuesto de que está dada la solución de a , obtener una contradicción” (véase Kolmogorov 1932, p. 60). De este modo, quedaba sugerida una semántica para la negación.

Heyting partió en su interpretación de las condiciones para *demostrar* enunciados con constantes lógicas. Esta interpretación es paralela a la de Kolmogorov y tiene muchos puntos en común. Siguiendo a Brouwer entendió las demostraciones como un tipo de *construcciones*. En su contribución al simposio sobre metodología de las ciencias formales realizado en Königsberg en septiembre de 1930, Heyting analizó los conceptos de enunciado, aseveración y verdad con elementos tomados de la teoría del significado de Husserl, tal como está expuesta en las *Investigaciones Lógicas* (Husserl LU), y que toma directamente del libro de Oskar Becker sobre la existencia matemática, pu-

blicado tres años antes, (Becker 1927). Por primera vez, se recurría en forma explícita a una teoría del significado para elucidar la lógica intuicionista.

Heyting comenzaba distinguiendo entre enunciado (*Aussage*) y aseveración (*Satz*): una aseveración es la *afirmación* de un enunciado (véase Heyting 1931). Un enunciado matemático expresa una *expectativa* (*Erwartung*), que puede considerarse propiamente una *intención*, en el sentido que Husserl le da al término como la relación entre un acto mental y el objeto o contenido de ese acto. (De acuerdo con la sección 20 de la quinta investigación lógica, expectativas y aseveraciones son cualidades de un acto intencional, véase LU II/1, p.142). Para Heyting, la intención no se dirige a un hecho independiente del sujeto, sino a una *vivencia* (*Erlebnis*), a un posible resultado del pensamiento que no es trascendente a la capacidad que tiene el sujeto de reconocerlo. En palabras de Heyting:

Distingo entre enunciados (Aussagen) y aseveraciones (Sätze): Una aseveración es la afirmación (Behauptung) de un enunciado. Un enunciado matemático expresa una determinada expectativa (Erwartung). [...] Tal vez la palabra 'intención' (Intention), acuñada por los fenomenólogos, exprese mejor que la palabra 'expectativa' lo que aquí se quiere decir. Uso la palabra 'enunciado' para la intención que es expresada lingüísticamente mediante el enunciado. La intención se dirige [...] no a un estado de cosas existente de manera independiente de nosotros, sino a una vivencia (Erlebnis) pensada como posible. (Heyting 1931. p. 113)

En este caso las vivencias son concebidas como *construcciones* que hace el sujeto de conocimiento, de modo que no se hace referencia a una realidad matemática independiente del sujeto.

La afirmación de un enunciado (que es lo que Heyting llama aseveración, *Satz*) es el cumplimiento (*Erfüllung*) de la intención. Este cumplimiento consiste en ver que la construcción constituye una demostración del enunciado. Posteriormente, en su libro de 1934 sobre intuicionismo y teoría de la demostración, Heyting resumió este proceso del siguiente modo:

...todo enunciado representa [...] la intención de una construcción matemática, que debe satisfacer determinadas condiciones. Una demostración de un enunciado consiste en la realización de la construcción exigida en ella. (Heyting 1934, p. 14)

Así, la intención *determina* aquello que puede cumplirla.

Siguiendo a Husserl en las Investigaciones lógicas (especialmente la sexta), puede decirse que el objeto al cual se refiere la intención expresada por un enunciado es el significado de ese enunciado. El significado de una expresión está determinado por un acto intencional de la conciencia (véase LU I, secciones 6 y 9, *passim*). De este modo, las construcciones mentales de las que habla Heyting serían los significados de los enunciados y el conocimiento del significado estaría dado por la intención. En este contexto, se hace la distinción entre construcciones posibles y construcciones realizadas. Estas últimas son las auténticas demostraciones, que son vistas a la vez, y manera indistinguible, como el proceso de demostrar y el resultado de ese proceso. Las demostraciones son entidades gnoseológicas, mientras que las construcciones son entidades semánticas. Así, dice Heyting:

La afirmación de un enunciado significa el cumplimiento de la intención. [...] La afirmación de un enunciado no es más un enunciado, sino la determinación de un hecho empírico, a saber, el cumplimiento de la intención expresada por el enunciado.
(Heyting 1931, p. 113)

En resumen, esto puede expresarse de la manera siguiente:

intención ————— significado
cumplimiento ————— demostración

Sobre esta base, la negación de un enunciado significa la intención de un *conflicto* (*Widerstreit*) vinculado con la intención que el enunciado negado significa. Con más precisión, Heyting señala que la negación:

es algo totalmente positivo, a saber la intención de un conflicto ligado con la intención originaria. El enunciado 'C no es racional' significa, por lo tanto, que se puede derivar una contradicción a partir del supuesto de que C es racional. Es importante observar que la negación de un enunciado siempre hace referencia a un procedimiento demostrativo que conduce a contradicción, incluso si en el enunciado original no se menciona ningún procedimiento demostrativo. (Heyting 1931, p. 113.)

Así queda justificado el rechazo del principio clásico de bivalencia, ya que hay enunciados cuya intención no puede completarse ni tampoco lleva a un conflicto, y, tal como es definida la negación, tampoco vale el principio del tercero excluido. Esta caracterización contiene diferentes aspectos: el hecho de una intención “de segundo nivel”, la aparición de la idea de supuesto o construcción subsidiaria y la necesidad de un procedimiento demostrativo o método de demostración. Tanto en el caso de Kolmogorov como en el de Heyting, la negación queda reducida a la contradicción, que funciona entonces como un concepto básico. Heyting expresó más tarde:

Creo que la contradicción debe adoptarse como un concepto primitivo. Parece difícil reducirlo a nociones más simples, y es siempre fácil reconocer una contradicción como tal. (Heyting 1956, p. 102)

La interpretación ofrecida por Heyting fue objeto de críticas. Hans Freudenthal, en una carta dirigida a Heyting con fecha de 23 de septiembre de 1930 (casi inmediatamente después del simposio en Königsberg, donde se habían encontrado) objeta el hecho de darle un significado subjetivo a la negación, dependiente del concepto de intención. Para Freudenthal lo esencial en la caracterización de la negación es la *existencia* de determinados procedimientos demostrativos. Por ello considera a esta interpretación como “forzada” (*zwingend*).⁵

Oskar Becker en su libro sobre la existencia matemática de 1927 se basa en las ideas de Husserl para analizar el significado de los enunciados matemáticos. En una carta fechada en septiembre de 1934, Becker evalúa muy positivamente la interpretación de Kolmogorov en términos de “lógica de problemas” y afirma que el término “problema” es un caso particular de del de “intención”: la resolución del problema corresponde al cumplimiento de la intención. De este modo, según Becker, la idea de una “semántica de problemas” esbozada por Kolmogorov puede subsumirse en la teoría husserliana del significado, y la lógica intuicionista se interpreta como un “cálculo de intenciones” (*Intentionsrechnung*).⁶

5 Freudenthal no admitía demostraciones hipotéticas. Véase Troelstra 1983, p. 201 y van Atten 2005b. También Bernays advirtió el carácter problemático de estas demostraciones para el intuicionismo cuando parten de “hipótesis irreales” (véase Bernays 1941, p.147).

6 Sobre la correspondencia entre Becker y Heyting, véase Véase van Atten 2005a, especialmente p. 138.

Para Becker la negación no indica simplemente la mera privación del cumplimiento, sino un hecho descriptivo nuevo. En la sexta de sus *Investigaciones lógicas* (sección 11), Husserl hablaba de *frustración o desilusión* (*Enttäuschung*) de una intención (véase LU II/2, pp. 41 y ss.). Este hecho era “una forma particular de síntesis”, que tiene como correlato una “no concordancia”, que él llama “conflicto”. En terminos de Husserl, la intuición no concuerda con la intención significativa, “entra en conflicto”, pero la vivencia de este conflicto es una forma de síntesis: “síntesis del conflicto” (véase Husserl, *loc. cit.*).

Becker señaló también algunos problemas en la concepción de Husserl. En primer lugar, la frustración presupone previamente la intención de un objeto (que es justamente la que conduce al conflicto, véase Becker 1927, p. 499). En el caso del cumplimiento se da una correspondencia o concordancia entre el objeto de la intención (“intencionado”) y el objeto efectivamente intuitido (*angesehen*). En el caso del conflicto esta concordancia es *imposible* (esto es en definitiva lo que este conflicto señala). Entonces, el conflicto también presupone un objeto de la intención. Pero, ¿qué tipo de objeto es este? Para responder a esta pregunta, Becker introduce la idea de *cumplimiento parcial* (Becker 1927, p. 500): el conflicto presupone un cumplimiento parcial de la intención. Becker proporciona el siguiente ejemplo (p. 499, nota 1): “El libro no está sobre la mesa”. Este enunciado afirma el conflicto que se da frente a la expectativa de que el libro esté sobre la mesa. Pero esto presupone la intuición de la mesa (independientemente del libro) o del libro (sin la mesa), etc. Más allá de su trivialidad (admitida por el mismo Becker, p. 63, quien adicionalmente ejemplifica con el postulado de Arquímedes), el ejemplo muestra los problemas que implica la introducción del concepto de intención en una teoría intuicionista del significado.

En segundo lugar, Becker hace la distinción (ausente en Husserl) entre el “no cumplimiento” y la frustración, lo que lleva, a su vez a distinguir entre *dos tipos de negación*, a saber entre la negación como no afirmación del enunciado y la negación como afirmación de que el enunciado lleva a contradicción (entre no afirmar p y afirmar que no p). El no cumplimiento tiene un sentido negativo (o “privativo”) a diferencia de la frustración, que es positiva. Como afirma Becker: “un simple no cumplimiento no es, en modo alguno, una frustración de la que se tiene una evidencia positiva” (Becker 1927, p. 500). Y esto serviría para explicar el hecho de enunciados significativos, pero indecibles (la intención correspondiente no lleva a su cumplimiento ni a su frustración). Pero además, para Becker, el incumplimiento de la intención puede implicar también algún tipo de cumplimiento parcial (un “cumpli-

miento más débil”). En el ejemplo anterior, de algún modo la mesa o el libro que son objetos de la intención concuerdan con la mesa o el libro intuitos. En este punto se advierte la referencia a estados de cosas que son meramente objeto de la intención y estados de cosas que son conocidas.

En Heyting la negación implica dos fases: primero, la *intención* del estado de cosas que conduce luego, en una segunda fase, a la *frustración*, de esta intención. Ahora bien, un primer problema que surge es que mientras que la demostración de un enunciado es un caso particular de cumplimiento de la intención, *no es totalmente claro que haya una construcción que corresponda al objeto de la intención que no es completada*. Y un segundo problema es que la intención que presupone la frustración corresponde a una construcción meramente *supuesta* y esta suposición no tiene un lugar claro en esta concepción del significado (a menos que esta suposición esté contenida en la misma intención).

Ahora bien, si se recurre a la teoría husserliana del significado se pueden distinguir dos tipos de actos que realiza el sujeto respecto de enunciados. *Un primer tipo de acto* es el que confiere significado al enunciado. Este es un *acto semántico*. El *segundo tipo de acto* es el que lleva al cumplimiento o satisfacción de la intención. Este es un *acto gnoseológico*. Al comienzo de la sexta investigación lógica, Husserl vincula el cumplimiento de una intención con el concepto de intuición y lo considera un acto (v. Husserl, LU II/2, p. 3). De este modo, el acto de completar una intención (*bedeutungserfüllender Akt*) es para Husserl un acto gnoseológico que se distingue claramente del acto que otorga significado (*bedeutungsverleihender Akt*, véase Husserl LU II/1, p. 38) y que no es esencial para el significado: enunciados que expresan una intención no completable. Por lo tanto, el cumplimiento de la intención no es condición necesaria del significado de un enunciado.

Cuando se restringe este marco general introduciendo el concepto de demostración, el primer acto establece las condiciones de *demostrabilidad* de enunciados, dándole significado al enunciado. El segundo acto del sujeto consiste en la *construcción de la demostración*, que lleva al conocimiento de lo que el enunciado expresa y hace que el sujeto pueda afirmar el enunciado. El primer acto parece ser el de indicar las condiciones para demostrar un enunciado, mientras que el segundo acto correspondería al reconocimiento de una demostración del enunciado, tan pronto como es exhibida al sujeto. En el primer caso, el acto semántico, se trata únicamente de la *posibilidad de la demostración* de un enunciado. En el segundo caso, el acto gnoseológico, se trata de la *existencia* de esa demostración. Esta distinción es útil para explicar

por qué hay enunciados con significado, pero indecibles. En el caso de un enunciado indecible que exprese una intención, todavía no se ha dado el cumplimiento de la intención ni se ha llegado a la imposibilidad de tal cumplimiento.

Para Husserl los significados son “objetos ideales” (LU I §21) que son atemporales: no pueden ni llegar a ser ni dejar de ser, no sufren ninguna forma de alteración. Más específicamente, son lo que Husserl llama *especies* (en un sentido diferente al que tiene la palabra en el intuicionismo como reemplazo del concepto de conjunto) objetos singulares y completos que son capaces de tener instancias; son instanciados en cada acto concreto de significación (tal como se aclara en la introducción a la segunda investigación). Husserl ejemplifica con el enunciado “ π es un número trascendente”. Lo que este enunciado afirma -dice Husserl - “no es un rasgo individual que sólo se va repitiendo cada vez en cada formulación diferente. No obstante, en cada caso es este rasgo, individualmente distinto, mientras que el sentido del enunciado debe ser idéntico.” (LU I §31, p. 99). “La identidad verdadera que afirmamos aquí no es otra que la identidad de la especie [...] El significado es a cada uno de los actos de significar (...) como, por ejemplo, la especie de rojo es a las tiras de papel que están aquí, todas las cuales 'tienen' el mismo rojo” (LU I §31, p. 100). Así, los significados constituyen una clase de conceptos, en el sentido de *objetos universales*. Según Husserl, hay algo que corresponde a las diversas formulaciones que puede tener un teorema, como por ejemplo, el teorema del paralelogramo de las fuerzas. Este es un *objeto*, tal como lo es la ciudad de París.

De manera análoga a Husserl, Per Martin-Löf distinguió posteriormente entre *demostraciones posibles* y *demostraciones existentes*, recurriendo a los conceptos clásicos, de la tradición aristotélica, de potencia y acto (Martin-Löf 1991, p. 142). Mientras que las demostraciones en acto dependen del conocimiento, las demostraciones en potencia sólo dependen del concepto de conocimiento. La construcción de una demostración hace que se actualice la demostración potencial. Es este concepto de *demonstración potencial* el que sirve para determinar el significado de enunciados, es decir, el que tiene carácter *semántico*.

Uno de los puntos en discusión es la caracterización de las *demostraciones posibles* como entidades, con lo que la discusión pasa a tener un tono *ontológico*. Cabe recordar que para Heyting “La intención se dirige [...] no a un estado de cosas existente de manera independiente de nosotros, sino a una vivencia (Erlebnis) pensada como posible”, de modo que no deja espacio para

considerar “objetos universales” en el sentido de Husserl. También Becker, en la carta a Heyting de 1934 mencionada antes, señala que la intención es, en el caso del intuicionismo, puramente “subjetivo-humana” (*subjektiv-menschlich*) y no una intencionalidad objetiva o “noemática” en el sentido de Husserl. La ontología supuesta por el intuicionismo no permite entidades de este tipo.

Ahora bien, ¿qué sucede con la negación? En resumen, afirmar $\neg A$ quiere decir que hay una demostración de una contradicción a partir de A . El problema es que si de A se sigue una contradicción, entonces *no es posible* una demostración de A y no es claro cómo darle significado a este enunciado.

Esto tiene cierta conexión con las objeciones que planteó G. F. C. Griss a la concepción de la negación basada en la contradicción. Griss compartía el punto de partida idealista de Brouwer al sostener que los objetos matemáticos son construcciones subjetivas. En pocas palabras, para Griss, en su libro *Idealistische filosofie* de 1946, la matemática surge en la distinción entre sujeto y objeto. A partir de ese momento, el sujeto puede construir nuevas entidades. Las secuencias infinitas son aquellas respecto de las cuales es imposible determinar cuándo terminan.

En una serie de trabajos, Griss critica la idea de basar la negación en el absurdo o la contradicción. La crítica de Griss se basa en el argumento siguiente: Si en el desarrollo de una construcción se obtiene una contradicción, entonces la hipótesis de la que se parte carece de una contrapartida mental, no representa ella misma un objeto construido por el sujeto; es una construcción *imposible*. Según Griss, esto se debe a que algo que es verdadero resulte posteriormente falso. El intuicionismo considera matemáticamente aceptables sólo aquellos razonamientos que parten de verdad y llegan a verdad, de modo que un proceso de razonamiento, una construcción, que llega a una contradicción no puede ser considerado auténticamente matemático (véase Griss 1950 y 1951). La negación, tal como es caracterizada en relación con la contradicción, *no es un concepto lógico*, pues no puede aplicarse a auténticos enunciados (los que tienen significado).

La solución que ve Griss consiste en considerar un concepto de negación que surge al *comparar* dos construcciones y advertir que son *diferentes* a partir del hecho de que no tienen las mismas propiedades. Esto lleva a tomar como punto de partida el concepto de *diferencia*, en lugar del concepto de identidad en la reconstrucción de la aritmética, que pasa a ser un concepto primitivo (véase Heyting 1956, p. 124). La idea no es ajena a los trabajos tempranos de Brouwer.

La crítica de Griss no contempla la posibilidad de hacer demostraciones a partir de supuestos o hipótesis⁷. No obstante, la idea de demostración hipotética formó parte desde un comienzo del instrumental intuicionista. En su tesis de 1907, Brouwer la utiliza para explicar los casos en que una construcción no puede llevarse a cabo de manera directa. En este caso se parte de una estructura “que satisface parte de las relaciones requeridas” y que, combinada con las relaciones que no han sido usadas, ofrece el punto de partida para construir la estructura requerida (Brouwer 1975, pp. 72 s.). La contradicción surge en esta demostración hipotética al “percibir que la construcción *no va más*”, es decir que la construcción de la estructura requerida no es posible.⁸

En suma, hasta aquí se han expuesto los intentos tempranos de otorgar *significado* a la negación intuicionista, empleando los conceptos de expectativa, intención, cumplimiento de la intención, y conflicto. Estos intentos muestran que la fenomenología no es un marco semántico enteramente adecuado para la elucidación de las constantes lógicas, pues lleva a considerar los significados como entidades ideales, independiente de las construcciones concretas que permiten demostrar un enunciado. En cuanto a la negación, los conceptos de frustración y conflicto sirven para su elucidación, pero no aclaran plenamente los conceptos de supuesto y demostración hipotética. La idea de cumplimiento *parcial* de la intención, subrayada por Becker, sugiere un camino. El significado parece estar ligado a la idea de un cumplimiento parcial, de modo que los enunciados hipotéticos pueden ser considerados significativos. Esto lleva a conjeturar una conexión entre cumplimiento parcial con la idea de demostración potencial.

Referências Bibliográficas

- Becker, Oskar. 1927. *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*. En *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, vol. VIII.
- Bernays, Paul. 1941. “Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration”. En *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*, comp. por F. Gonseth. Zurich, Lemann frères et Cie.
- Brouwer, L. E. J. 1975. *Collected Works I*, comp. por Arendt Heyting. Amsterdam, North-Holland.

7 En esto concuerda con Freudenthal.

8 Un análisis del pasaje de Brouwer puede encontrarse en van Atten 2004.’

- Griss, G. F. C.: 1951. Negationless intuitionistic Mathematics II”, *Indagationes Math.*, 12, pp. 108-115.
- _____. 1951. Negationless intuitionistic Mathematics III”, *Indagationes Math.* 13, pp. 193-200, 452-471.
- Heyting, Arendt. 1931. “Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik”. *Erkenntnis*, vol.2, pp. 106-115.
- _____. 1934. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*. Berlin, Springer.
- _____. 1956. *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam - Londres, North-Holland.
- Hilbert, David. 1923. “Die logischen Grundlagen der **Mathematik**”. *Mathematische Annalen* 88, pp. 151-165.
- Husserl, Edmund. LU. *Logische Untersuchungen*. Vol. I y vol. II, 4ta. ed., Tübingen, Max Niemeyer, 1968. (También en *Husserliana. Edmund Husserl, Gesammelte Werke* vols. 18 y 19. La Haya, Martinus Nijhoff, 1975 y 1984).
- Kolmogorov, Andrei N. 1925. “On The Tertium Non Datur Principle”. *Selected Works of A.N. Komogorov*, vol I. Mathematics and Mechanics, comp. por V. M. Tikhmorivov, trad. inglesa de V. M. Volosov. Doredrecht et al., Kluwer, 1991.
- _____. 1932. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”. En *Mathematische Zeitschrift* 35, pp. 58-65.
- Martin-Löf, Per. 1991. “A Path from Logic to Metaphysics”. *Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della Scienza*, vol. II, Bologna, CLUEB, pp. 141-149.
- Troelstra, Anne S. 1983. “Logic in The Writings of Brouwer and Heyting”. *Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica, San Geminiano 4-8 dicembre 1982*, Bologna, CLUEB, pp. 193-210.
- van Atten, Mark. 2004. “Brouwer and the Hypothetical Judgement. Second Thoughts on John Kuiper’s *Ideas and Explorations. Brouwer’s Road to Intuitionism*”. *Revue Internationale de Philosophie* 58, 4, pp. 501-516.
- _____. 2005a. “The Correspondence between Oskar Becker and Arendt Heyting”. *Oskar becker und die Philosophie der Mathematik*, comp. por Volker Peckhaus. Múnich, Wilhelm Fink, Verlag.
- _____. 2005b. “The Hypothetical Judgement in the History of Intuitionistic Logic”. Manuscrito de una conferencia dada en París, Lille, Jerusalén y Viena.