Wagner de Campos Sanz[1]

Negação e Falsidade

Resumo

Trataremos do conceito de falsidade e do conceito de negação. Mostraremos a existência de uma Aritmética de Peano para a refutabilidade estruturalmente idêntica ao sistema para demonstrabilidade, depois aduziremos algumas considerações acerca das leis de DeMorgan, formulando-as de modo unitário e completo para todo o quadro de constantes lógicas de primeira ordem. Os resultados sugerem algumas questões de ordem filosófica.

Palavras-chave: Negação . Falsidade . Leis de DeMorgan . Aritmética de Peano . Refutabilidade

Abstract

We examine the concept of falsity and the concept of negation. We show that it is possible to formulate a version of Peano Arithmetic for refutability which is structurally identical with the system for provability. After doing this we consider De Morgan's laws, which seem to be behind these structural similarities, trying to formulate such laws in a unified and complete fashion for all usual first order logical constants. These results bring out some questions of a philosophical nature.

Key-words: Negation . Falsity . DeMorgan's laws . Peano Arithmetic . Refutability

1 Professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Goiás. E-mail: wsanz@uol.com.br

Em matemática, negação e falsidade estão frequentemente associadas. Afirma Heyting ([Hey56], pp. 18 e 19), por exemplo:

> *Estritamente falando, nós devemos bem distinguir o uso do "não" na matemática daquelas explicações envolvendo-o e que não são matemáticas, e que são expressadas em linguagem ordinária. Nas asserções matemáticas nenhuma ambigüidade pode surgir: o "não" tem sempre um significado estrito. "A proposição p não é verdadeira", ou "a proposição p é falsa" significa "Se nós supomos a verdade de p, nós somos levados a uma contradição".*

Todavia, perguntamos, seria de fato a negação uma forma de expressar a falsidade de uma proposição dentro dos sistemas lógicos?

Vamos formular, a seguir, sistemas para a preservação da falsidade. Tradicionalmente, considera-se que as demonstrações dentro de um sistema lógico preservam a verdade. Contudo, nada impede que consideremos a preservação da falsidade como um critério de adequação distinto, ainda de caráter lógico. O sistema que apresentamos a seguir tem esse espírito, sua formulação toma por base a formulação presente em Kleene ([Kle52], p. 82) :

	Aritmética de Peano Demonstrabilidade	Aritmética de Peano Refutabilidade
Parcela Proposicional	1a. $A\supset(B\supset A)$	1a. $A\not\subset(B\not\subset A)$
	1b. $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$	1b. $(A\not\subset B)\not\subset((A\not\subset(B\not\subset C))\not\subset(A\not\subset C))$
	2. $\dfrac{A,\ A\supset B}{B}$	2. $\dfrac{A,\ A\not\subset B}{B}$
	3. $A\supset(B\supset(A\& B))$	3. $A\not\subset(B\not\subset(A\vee B))$
	4a. $A\& B\supset A$	4a. $A\vee B\not\subset A$
	4b. $A\& B\supset B$	4b. $A\vee B\not\subset B$
	5a. $A\supset A\vee B$	5a. $A\not\subset A\& B$
	5b. $B\supset A\vee B$	5b. $B\not\subset A\& B$
	6. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$	6. $(A\not\subset C)\not\subset((B\not\subset C)\not\subset(A\& B\not\subset C))$
	7. $(A\supset B)\supset((A\supset B\neg)\supset A\neg)$	7. $(A\not\subset B)\not\subset((A\not\subset\sim B)\not\subset\sim A)$
	8. $\neg\neg A\supset A$	8. $\sim\sim A\not\subset A$
Parcela Predicacional	9. $\dfrac{C\supset A(x)\ .}{C\supset\forall xA(x)}$	9. $\dfrac{C\not\subset A(x)\ .}{C\not\subset\exists xA(x)}$
	10. $\forall xA(x)\supset A(t)$	10. $\exists xA(x)\not\subset A(t)$
	11. $A(t)\supset\exists xA(x)$	11. $A(t)\not\subset\forall xA(x)$
	12. $\dfrac{A(x)\supset C\ .}{\exists xA(x)\supset C}$	12. $\dfrac{A(x)\not\subset C\ .}{\forall xA(x)\not\subset C}$

Parcela Aritmética	13. $A(0)\&\forall x(A(x)\supset A(x'))\supset A(x)$	13. $A(0)\vee\exists x(A(x)\not\subset A(x'))\not\subset A(x)$
	14. $a'=b'\supset a=b$	14. $a'\neq b'\not\subset a\neq b$
	15. $\neg a'=0$	15. $\sim a'\neq 0$
	16. $a=b\supset(a=c\supset b=c)$	16. $a\neq b\not\subset(a\neq c\not\subset b\neq c)$
	17. $a=b\supset a'=b'$	17. $a\neq b\not\subset a'\neq b'$
	18. $a+0=a$	18. $a+0\neq a$
	19. $a+b'=(a+b)'$	19. $a+b'\neq(a+b)'$
	20. $a.0=0$	20. $a.0\neq 0$
	21. $a.b'=a.b+a$	21. $a.b'\neq a.b+a$

Uma a uma, as fórmulas e regras nas duas colunas acima são estruturalmente similares. A diferença reside no emprego das constantes lógicas, elas foram mutuamente substituídas aos pares. Nós os chamaremos de pares de duais: $[\wedge,\vee]$; $[\supset,\not\subset]$; $[\forall,\exists]$; $[\bot,T]$; $[\neg,\sim]$ e $[=,\neq]$. Estamos usando um segundo símbolo de negação no sistema para preservação da falsidade, pois não está garantido que a negação signifique exatamente a mesma coisa em ambos os casos. A "desimplicação reversa" pode ser definida: $A\not\subset B\equiv_{df}\neg(B\supset A)$. Sua tabela de verdade é a seguinte:

A	B	$A\not\subset B$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Também, observamos que o símbolo de difereça está sendo tomado como um predicado básico, tão básico quanto a igualdade. Notamos que as regras 9 e 12 só serão aplicáveis caso a variável *x* não ocorra livre na conclusão da regra.

A primeira questão a ser resolvida para o novo sistema é a de mostrar que todos os axiomas são falsos (refutáveis) e todas as regras preservam a falsidade. A forma mais rápida de observar a propriedade consiste em examinar as regras do sistema de dedução natural para preservação da falsidade. Com efeito, tomando um sistema de dedução natural e fazendo as mesmas substituições que fizemos acima, obteremos regras que são todas elas preservadoras da falsidade[2]. Desse modo, o sistema abaixo seria a tradução correspondente do sistema intuicionista de dedução natural:

2 Caso o sistema de preservação da verdade seja formulado com o *falsum*, $\bot$, no sistema para preservação da verdade deveríamos trocá-lo pelo *verum*, T.

Introduções	$\dfrac{A_1 \qquad A_2}{A_1 \vee A_2}\, i\vee^f$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A_1]^i \\ \nabla \\ A_2\end{array}}{A_1 \not\subset A_2}{}^i\, i\not\subset^f$	$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ A(x)\end{array}}{\exists x A(x)}\, i\exists^f$
	$\dfrac{A_1}{A_1 \wedge A_2}\, i\wedge^f e \qquad \dfrac{A_2}{A_1 \wedge A_2}\, i\wedge^f d$		$\dfrac{A(t)}{\forall x A(x)}\, i\forall^f$
Eliminações	$\dfrac{A_1 \vee A_2}{A_1}\, e\vee^f e \qquad \dfrac{A_1 \vee A_2}{A_2}\, e\vee^f d$	$\dfrac{A_1 \quad A_1 \not\subset A_2}{A_2}\, e\not\subset^f$	$\dfrac{\exists x A(x)}{A(t)}\, e\exists^f$
	$\dfrac{A_1 \wedge A_2 \quad \begin{array}{c}\Gamma_1, [A_1]^i \\ \nabla \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2, [A_2]^i \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}{}^i\, e\wedge^f$	$\dfrac{T}{A}\, eT$	$\dfrac{\forall x A(x) \quad \begin{array}{c}\Gamma, [A(x)]^i \\ \nabla \\ C\end{array}}{C}{}^i\, e\forall^f$

As regras nesse sistema devem ser lidas de modo idêntico àquele que usaríamos para tratar da preservação da verdade, ou seja, diríamos que há preservação da falsidade quando estiver garantido que a conclusão seja falsa quando todas as derivações subsidiárias preservam a falsidade e as fórmulas topo abertas são todas falsas[3]. As regra $i\exists^f$ e $e\forall^f$ tem uma restrição de aplicabilidade que é a de que a variável x não ocorra em Γ nem C. Nesse sistema não há regras de introdução e eliminação para a implicação, mas regras de introdução e eliminação para a desimplicação. A regra de introdução estabelece que poderíamos concluir pela falsidade $A_1 \not\subset A_2$ caso houvesse preservação da falsidade de Γ, A_1 em direção a A_2 e todas as fórmulas de Γ fossem falsas.

As regras do sistema para a falsidade não se distinguem sintaticamente das regras do sistema para a preservação da verdade. Trocam de lugar a conjunção e a disjunção, por um lado, o existencial e o universal, por outro. Todavia, é

3 Neste contexto, dizer que existiria preservação da falsidade das suposições para a premissa imediata da regra significaria dizer que caso as suposições fossem todas falsas estaria necessariamente garantido que a conclusão da derivação subsidiária também seria falsa. Para todos os fins, premissas que não sejam conclusão de uma derivação subsidiária serão consideradas convencionalmente como derivações subsidiárias de uma única fórmula. Notamos, finalmente, que é problemático falar em preservação da verdade para $i\forall$ e problemático falar em preservação da falsidade para $i\exists^f$.

preciso notar, o fato de que um símbolo represente uma conjunção ou uma disjunção é apenas uma convenção. O mesmo vale para as regras de introdução e eliminação para a implicação ($\supset$) e desimplicação ($\not\subset$), bem como para a regra de eliminação para o *falsum* e o *verum*. Desse modo, qualquer propriedade do sistema de preservação da verdade que dependa unicamente da estrutura das derivações poderá ser estendido ao sistema para a falsidade[4]. Em particular, o sistema é consistente, já que consistência é conseqüência de normalização e a prova de normalização é estrutural. Além disso, para primeira ordem, se vale correção e completude do sistema de preservação da verdade, deve também valer para o sistema de preservação da falsidade[5].

O sistema para a falsidade, acima, só contaria com a anuência intuicionista na sua parte proposicional, pois a regra de $e\forall^{f}$ não seria considerada válida[6]. Todavia, a rejeição não deixa de ser surpreendente, já que a regra é sintaticamente idêntica à regra de $e\exists$, a qual, por seu turno, é aceita pelos intuicionistas contemporâneos, ao definirem o conceito de prova canônica com base no princípio de inversão. Adicionalmente, a regra $i\forall^{f}$ no sistema para preservação da falsidade parece ser uma boa descrição das condições sob as quais consideraríamos falsa uma proposição universal, desde o ponto de vista intuicionista. Ou seja, enquanto regra de introdução, ela não parece objecionável, embora a eliminação correspondente o seja, mesmo se ambas estão em harmonia segundo o princípio de inversão.

Para obter o sistema de preservação da falsidade correspondente ao sistema clássico, só precisaríamos acrescentar um princípio de prova indireta. Poderia ser ou o axioma correspondente à tradução do terceiro excluído - ou seja, $A\wedge{\sim}A$[7] - ou a regra abaixo, tradução da assim chamada *Consequentia Mirabilis*:

$$\boxed{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\,,\ [A\not\subset\top]^{i}\\ \nabla\\ A\end{matrix}}{A}\,i}$$

4 Pensamos aqui, sobretudo, nos teoremas de normalização e confluência e todos os seus corolários. Ver [Pra65].

5 Claro, a idéia sugere que se desenvolva ou se adapte a semântica de modelos para a falsidade.

6 A razão para isso está em que não há garantias de que possamos mostrar para algum termo t que o *absurdum* se seguiria de $A(t)$ quando o *absurdum* se segue de $\forall xA(x)$.

7 A negação pode ser definida como $\neg A\equiv_{df}A\supset\bot$ (no sistema de preservação da verdade), ${\sim}A\equiv_{df}A\not\subset\top$ (preservação da falsidade) ou ser tomada como primitiva.

Usando essa regra não é difícil derivar junto com as demais regras do sistema para a falsidade, a partir de zero hipóteses, a fórmula $A \wedge \sim A$.

Ora, todas as regras e fórmulas do cálculo de predicados para preservação da falsidade no sistema de estilo Kleene, dado mais acima, são deriváveis a partir das regras de dedução natural. Além disso, todos os axiomas próprios da Aritmética de Peano para a refutabilidade são intuitivamente falsos, como uma exceção. A exceção é aquela em que a intuição enfrenta maior dificuldade: o axioma da indução. A regra de dedução natural para a indução no sistema de preservação da verdade é sintaticamente indiscernível da regra de indução no sistema para preservação da falsidade:

$$\dfrac{A(0) \qquad \begin{matrix}[A(x)]^{i} \\ \nabla \\ A(x')\end{matrix}}{A(y)}\ {}^{i}\ ind^{f}$$

Basicamente, se, ao mesmo tempo, *A(0)* for falso e de *A(x)* para *A(x´)* houver preservação da falsidade, então *A(x)* seria falso, onde *x* é uma variável que não pode ocorrer livre nas hipóteses abertas aoós a aplicação da regra. A derivação da fórmula $A(0)\vee\exists x(A(x)\not\subset A(x'))\not\subset A(x)$ é a seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(0)\vee\exists x(A(x)\not\subset A(x'))]^{2}}{A(0)}\ e\vee^{f} \qquad \dfrac{[A(x)]^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{[A(0)\vee\exists x(A(x)\not\subset A(x'))]^{2}}{\exists x(A(x)\not\subset A(x'))}\ e\vee^{f}}{A(x)\not\subset A(x')}\ e\exists^{f}}{A(x')}\ e\not\subset^{f}}{A(x)}\ {}^{1}\ ind^{f}}{A(0)\vee\exists x(A(x)\not\subset A(x'))\not\subset A(x)}\ {}^{2}\ i\not\subset$$

Ao cabo, para garantir a correção do sistema formulado, bastaria com certificar-se que cada uma das regras de dedução natural preserva a falsidade, tarefa que deixamos aos leitores.

Portanto, a Aritmética de Peano para a refutabilidade é correta e para cada fórmula derivável a partir de zero hipóteses haverá uma fórmula de estrutura similar derivável de zero hipóteses na Aritmética para a demonstrabilidade e vice-versa.

Definimos a seguir a operação * sobre as fórmulas. Ela consiste da substituição das constantes lógicas e dos predicados básicos pelos seus duais: $[\wedge,\vee]$; $[\supset,\not\subset]$; $[\forall,\exists]$; $[\perp,\top]$; $[\neg,\sim]$ e $[=,\neq]$.

Como os sistemas para a demonstrabilidade e para a refutabilidade são sintaticamente indiscerníveis haverá uma fórmula godeliana G em um sistema e uma sentença godeliana G^* no outro tal que G e $\neg G$ não serão deriváveis no sistema para a demonstrabilidade, mas, também, G^* e $\sim G^*$ não serão deriváveis no sistema para a refutabilidade, sob a hipótese de "consistência" do sistema em ambos casos.

Dirijamos nossa atenção para outro lado, por alguns momentos. Nós podemos divisar uma extensão das leis de DeMorgan para o conjunto completo das constantes lógicas de primeira ordem. Em seguida, retomamos a questão das sentenças godelianas.

Para formular o teorema a seguir, consideraremos que todas as constantes lógicas pertencem a uma mesma linguagem, consideraremos a equivalência como definida e usaremos um único símbolo de negação ($\neg$).[8]

Teorema I: Seja A uma fórmula de uma linguagem na qual para cada predicado básico P há um dual Q tal que para quaisquer termos $t_1,\ldots,t_n$, $P(t_1,\ldots,t_n)\Leftrightarrow\neg Q(t_1,\ldots,t_n)$, logo $A^*\Leftrightarrow\neg A$.[9]

Prova: Por indução no grau de A. Se A é básica, fácil. Se A é uma conjunção ou uma disjunção, nós temos a equivalência formulada fazendo as demonstrações usando regras de dedução natural, pois por hipótese de indução $B^*\Leftrightarrow\neg B$ e $C^*\Leftrightarrow\neg C$, assim $A^*\equiv(\neg B^*\vee\neg C^*)\Leftrightarrow\neg(B\wedge C)\equiv\neg A$[10]. Se $A\equiv\perp$, então $A^*\equiv\neg\top$, imediato. Se $A\equiv\top$, similar ao caso precedente. Se $A\equiv(B\supset C)$, então $A^*\equiv(B^*\not\subset C^*)$, mas por hipótese de indução $B^*\Leftrightarrow\neg B$ e $C^*\Leftrightarrow\neg C$, assim, $A^*\equiv(\neg B^*\not\subset\neg C^*)\Leftrightarrow\neg(B\supset C)\equiv\neg A$. Se $A\equiv(B\not\subset C)$, similar. Se $A\equiv\forall xB(x)$, então $A^*\equiv\exists x(B^*(x))$, mas por indução $B^*\Leftrightarrow\neg B$, assim $A^*\equiv\exists x\neg B(x)\Leftrightarrow\neg\forall xB(x)\equiv\neg A$. Se $A\equiv\exists xB(x)$, similar. *QED*

O teorema acima foi sugerido a partir da intuição de que uma fórmula A em um dos sistemas axiomáticos, seja ele para a verdade ou para a falsidade,

8 A constante de equivalência na linguagem objeto pode ser definida a partir das demais.

9 Estamos usando o símbolo $\Leftrightarrow$ para expressar equivalência lógica na metalinguagem, esse símbolo pode ser tanto interpretado como equivalência lógica num semântica quanto equivalência lógica dedutiva.

10 Usamos o símbolo $\equiv$ para expressar a equivalência sintática.

pode ser posto em correspondência com A^* no outro sistema. Assim, se uma delas for verdadeira, a outra deve ser falsa e, portanto, uma tem que ser equivalente a negação da outra.

Podemos estender a operação de modo a obter um teorema mais geral, no sentido de ter uma condição de aplicabilidade menos restritiva. Definamos a operação ° como a operação similar a * tal que no caso dos predicados básicos e das variáveis proposicionais essa nova operação adiciona uma negação na frente, ao invés de trocá-lo pelo seu dual como na operação *.

Teorema II: $\vdash A^\circ \Leftrightarrow \neg A$.

Prova: Similar à prova do teorema I.

Lema: As leis de DeMorgan valem para o conjunto completo de constantes lógicas de primeira ordem.

Prova: Usando o Teorema II e a substituição de equivalências da forma $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

É espantoso que, afinal de contas, por trás do teorema de incompletude para a Aritmética de Peano, o qual nunca perde completamente seu ar de mistério, esteja envolvida uma propriedade que está correlacionada às leis de DeMorgan. Assim, segundo o teorema acima $G^* \Leftrightarrow \neg G$, ou seja, poderíamos reformular o teorema de Gödel dizendo que há uma fórmula G tal que nem ela nem a fórmula G^* são deriváveis no sistema[11], seja ele o sistema para demonstrabilidade seja o sistema para a refutabilidade. Se interpretarmos que G, no sistema para a demonstrabilidade, diz *eu não sou derivável no sistema para a demonstrabilidade*, então $\neg G$ significaria, do ponto de vista do sistema para a demonstrabilidade, *G é derivável no sistema para a demonstrabilidade*, o que é falso. Logo, deveríamos, coerentemente, assumir que G^* é falso, pois $G^* \Leftrightarrow \neg G$, pelo teorema I. Como G^* não pode ser derivado no sistema para refutabilidade, caso contrário G seria derivado no sistema para a demonstrabilidade, há uma falsidade não derivável no sistema para a refutabilidade. Isso é coerente com a interpretação de G^* como significando *eu sou derivável no sistema para a refutabilidade*. Por seu turno, como $\neg G^* \Leftrightarrow G$, poderíamos interpretar $\neg G^*$ como significando *G^* não é derivável no sistema para a refutabilidade*, o que é verdade.

11 Desde que a linguagem contenha todas as constantes lógicas e suas duais. Contudo, isso não é uma condição necessária, pois, lembramos, a desimplicação reversa pode ser definida a partir da implicação e da negação.

Assim, se nossas interpretações são corretas, existem dois pares de fórmulas duais - G e G^*, por um lado, $\neg G$ e $\neg G^*$, por outro – tal que em cada par uma é verdadeira e a outra falsa, mas nenhuma das quatro é derivável em qualquer um dos dois sistemas, sob hipótese de consistência. Para cada par de fórmulas duais, a derivabilidade de uma delas, em algum dos dois sistemas, implicaria a derivabilidade da outra, no outro sistema. Qualquer prova em um deles corresponde a uma prova via tradução * no outro.

Se concordarmos que ser demonstrável implica ser verdadeiro e que ser refutável implica ser falso[12], então, pelo fato de não podermos, desde um ponto de vista clássico, distinguir sintaticamente o que é demonstrável do que é refutável, nós não poderíamos sintaticamente distinguir a verdade da falsidade. Em resumo, a distinção entre a verdade e a falsidade não é exprimível sintaticamente e, assim, deve haver uma capacidade presente nos intérpretes da sintaxe que lhes permite distinguir os casos, a menos que a hipótese do gênio maligno enganador, que nos faz tomar por verdadeiro o falso, seja uma hipótese que não esteja definitivamente descartada.

Voltando à questão apresentada ao início, se assumirmos que a negação, dentro dos sistemas lógicos para preservação da verdade, representa a falsidade, então, nos sistemas para a falsidade, deveria representar a verdade, pois qualquer fórmula negada que seja derivável é falsa e, desde o ponto de vista clássico, a proposição que está sendo negada é verdadeira. Como ambos os sistemas axiomáticos são indiscerníveis sintaticamente, nós não podemos asserir de modo simples que a negação representa a falsidade mais do que a verdade, sem fazer alguma referência às nossas intenções: a intenção de que um determinado sistema sintático representa a preservação da verdade ou de que representa a preservação da falsidade.

12 Esse será o caso sempre que todas as formulas da linguagem correspondem a sentenças fechadas e o sistema é correto. Caso a linguagem também admita fórmula que correspondem a sentenças abertas, dentre as sentenças abertas existirão sentenças demonstráveis, refutáveis e sentenças nem demonstráveis nem refutáveis. Desse modo, o sistema será incompleto se for correto.

Bibliografia

Blanché, R.: *Structures Intelectuelles - Essai Sur L'organisation Systématique des Concepts*, Vrin, 1966.

Curry, H.B.: *Foundations of Mathematical Logic*, Dover, 1963.

Gentzen, G.: *Investigations Into Logical Deduction*, in Gentzen Collected Papers, pp. 68-131, ed. M.E.Szabo, North-Holland, 1969.

Heyting, A.: *Intuitionism*, North-Holland, 1956.

Kleene, S.C.: *Introduction to Metamathematics*, D. Van Nostrand, 1952.

Prawitz, D.: *Natural Deduction*, Almqvist&Wiksell, 1965.

Sanz, W. de C.: *A Natural Deduction System Preserving Falsity*. Energeia, vol. 4, pp. 215-220, 2005.

Schroeder-Heister, P.: *Begründungsrationalität und Logik*. M. Carrier, G. Wolters (eds.), Homo Sapiens und Homo Faber: Epistemische und technische Rationalität in Antike und Gegenwart. Festschrift für Jürgen Mittelstraß, Berlin: de Gruyter 2005, 285-296.

Smullyan, R.: Gödel's Incompleteness Theorems. Oxford, 1992.