

## Algumas Considerações sobre a Noção Construtiva de Verdade

Alguns dos principais representantes do construtivismo contemporâneo têm recentemente discutido e investigado a possibilidade de um espaço conceitual independente para uma noção construtiva de verdade que satisfaça duas condições mínimas:

- (1) Não se reduzir à noção de *asserção justificada*;
- (2) Ser uma noção objetiva de verdade.

Este artigo tem um duplo objetivo. O primeiro é examinar criticamente a proposta defendida por Prawitz, no artigo “Truth and objectivity from a verificationist point of view”<sup>1</sup>, para uma noção construtiva de verdade que satisfaça essas duas condições. Acreditamos que a proposta de Prawitz incorpora alguns dos principais e mais interessantes problemas relacionados à fundamentação filosófica de conceitos centrais para o construtivismo contemporâneo, entre eles os de *verificação*, *sentido*, *prova*, e *verdade*. Nosso segundo objetivo é, em um plano mais específico, discutir e problematizar o freqüente apelo do intuicionismo contemporâneo a noções *modais* na explanação do vínculo entre os conceitos de *verdade* e de *prova*.

O artigo está organizado da seguinte maneira. Em uma parte inicial introdutória, fazemos uma breve caracterização do tipo da abordagem construtivista com a qual estaremos dialogando ao longo deste trabalho. Na segunda parte, descrevemos a proposta de Prawitz para uma noção construtiva de verdade e apresentamos um primeiro problema relacionado a essa proposta – o problema do portador da verificabilidade. Na terceira e última parte, discuti-

---

\* André da Silva Porto, Dep. de Filosofia UFG e Luiz Carlos Pereira, Dep. de Filosofia PUC-RIO.  
1 Dag Prawitz, em *Truth in Mathematics*, eds. H.G. Dales & G. Oliveri.

mos criticamente o uso que o intuicionismo contemporâneo faz da noção modal de possibilidade na caracterização de alguns de seus conceitos mais fundamentais. Nossa discussão abrangerá nesse ponto, além de Prawitz, outros dois importantes representantes dessa corrente filosófico-matemática, a saber, Per Martin-Löf, e, é claro, Michael Dummett.

### Parte 1 – O “novo verificacionismo”: o Intuicionismo Contemporâneo

É muito importante que determinemos desde o início de que intuicionismo se está falando. Como é bem sabido, o intuicionismo contemporâneo, principalmente após os trabalhos de Michael Dummett, adquiriu um forte traço lógico-semântico e guarda importantes diferenças com respeito ao intuicionismo originário de Brouwer. Prawitz chega a sugerir que utilizemos um novo nome, “verificacionismo”, para designar o tipo de construtivismo que está em discussão. Porém, nesse caso, novamente teríamos um problema de demarcação. Precisaríamos distinguir, como faz Prawitz, esse novo verificacionismo do verificacionismo tradicional do assim chamado “Círculo de Viena”. Como sabemos, a versão tradicional do verificacionismo se caracterizava pelo *slogan*: “o significado de uma sentença é dado pelo seu método de verificação”. Na nova versão do verificacionismo, as noções de verificação e de prova ligam-se conceitualmente tanto com a noção de sentido, quanto com a noção de verdade.<sup>2</sup> É um traço característico desse novo verificacionismo a análise da noção de verificação em termos de condições para a asserção correta e de conseqüências da asserção. Esse traço do novo verificacionismo tem a sua origem na análise que Gerhard Gentzen faz da natureza das inferências lógicas, associando a cada operador lógico um conjunto de regras que estabelecem as condições para que uma sentença que tenha esse operador como operador principal possa ser asserida (as *regras de introdução*), e um conjunto de regras que estabelecem as conseqüências que podemos inferir da asserção de uma sentença que tenha esse operador como operador principal (as *regras de eliminação*). Nas “Investigações Sobre a Dedução Lógica”, Gentzen faz um comentário que serve de base para boa parte da literatura ligada ao novo verificacionismo:

As introduções representam como que as “definições” do símbolo envolvido, e as eliminações não são, em última análise, mais do que as conseqüências dessas

2 Ver, por exemplo, Per Martin-Löf, “On the meanings of the logical constants”, pg. 37.

definições. Esse fato pode ser expresso da seguinte forma: Ao eliminarmos um símbolo, podemos usar a fórmula com símbolos terminais com os quais estamos lidando apenas “no sentido a eles fornecidos pela introdução”.<sup>3</sup>

O princípio de inversão (*inversion principle/harmony principle*) é o modo padrão de se justificar as regras de eliminação a partir das regras de introdução. Vejamos um exemplo: tomemos a regra de eliminação para a implicação (modus ponens):

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Se a premissa  $A \rightarrow B$  é obtida por introdução, então nossa derivação é de fato:

$$\frac{\begin{array}{c} \Pi \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} [A] \\ \Sigma \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Essa derivação pode ser transformada, por uma aplicação da  $\rightarrow$ -redução, na derivação:

$$\begin{array}{c} \Pi \\ [A] \\ \Sigma \\ B \end{array}$$

Justificando assim a conclusão da eliminação.

A idéia de Gentzen foi então generalizada por Dummett: às regras de introdução corresponderiam condições para corretamente realizarmos um proferimento, e às regras de eliminação, regras que determinariam as reações corretas com respeito a um proferimento. Um novo tipo de Holismo parece aqui ser defendido: o significado de uma sentença teórica não seria mais de-

<sup>3</sup> Gerhard Gentzen. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. pg. 80.

terminado por um conjunto de sentenças observacionais, mas pelo lugar (posto, posição) que essa sentença ocupa na “rede inferencial em que ocorre”. Dummett talvez tenha sido o principal responsável por essa fase inicial da “semantização” das operações de redução definidas por Prawitz em 1965.

## Parte 2 – A proposta de Prawitz para uma noção construtiva de verdade

A posição mais tradicional com respeito à noção construtiva de verdade, posição já defendida por Dummett, pode ser expressa da seguinte maneira: o intuicionismo não necessita de uma noção independente de “verdade de uma sentença”, diferente da noção de “correção da asserção”.<sup>4</sup> De acordo com essa posição, uma sentença ser verdadeira não seria diferente de ela ser asserida corretamente, e ser asserida corretamente significaria conhecer uma prova canônica (estar de posse de uma prova canônica) ou saber uma prova não-canônica/indireta a partir da qual uma prova canônica poderia ser obtida. Em um artigo recente, porém, “Truth from the constructive standpoint”, o próprio Dummett parece mudar de idéia e defende que, mesmo de um ponto de vista construtivo, deveria haver algum lugar para um conceito independente de verdade que pudesse fundamentar um certo tipo de concepção metafísica:

...uma semântica para matemática intuicionista precisa de uma noção de verdade, e não apenas a de asserção justificada, se é para ela sustentar uma explanação metafísica da natureza da realidade matemática.<sup>5</sup>

A rota utilizada por Prawitz para uma noção construtiva de verdade passa pela noção de *conteúdo* de uma asserção. Segundo Prawitz, quando asserirmos uma sentença, devemos distinguir duas coisas: (a) aquilo com que nos comprometemos quando asserirmos a sentença, e (b) o *conteúdo* de nossa asserção. Prawitz diz:

Ao asserirmos uma sentença, garantimos que existe uma prova da mesma, mas não é isso que a asserção diz: o conteúdo da sentença, o que dizemos quando a asserirmos, é simplesmente que a sentença é verdadeira, não que temos uma prova da mesma.<sup>6</sup>

4 Ver, por exemplo, Michael Dummett, “What is a theory of meaning? II”, em *The Seas of Language*, pg. 70.

5 Michael Dummett, “Truth from the Constructive Standpoint”, pg. 123.

6 Dag Prawitz, op. cit., pg. 46.

O que é garantido por uma asserção é diferente daquilo que é dito por uma asserção. Aqui Prawitz realmente parece atingir o alvo! Quando fazemos uma asserção, abrimos naturalmente um espaço conceitual para a questão da justificação. Quando afirmamos que  $p$ , nos comprometemos perante um interlocutor a responder a questão: como você sabe que  $p$ ? E claramente essa situação envolve uma diferença entre a justificativa e aquilo para que temos (apresentamos) a justificativa, que seria o próprio conteúdo da nossa afirmação (que  $p$ ). Para um lógico clássico essa distinção é mais do que natural: o aspecto epistêmico das condições para uma asserção não se confundem com o aspecto semântico/ontológico do conteúdo da asserção (explicado usualmente em termos clássicos com auxílio da noção de Verdade). Seria uma compreensão equivocada da natureza da asserção “pensar seu conteúdo como sendo o de que uma prova foi encontrada”; uma tal compreensão claramente sobrecarregaria o conteúdo asserido.

A idéia de Prawitz é muito simples: a distinção entre conteúdo asserido e comprometimentos da asserção também deveria ser adotada pelo construtivista. Dessa forma:

...o verificacionista também precisa de uma noção de verdade para poder dizer que o conteúdo de uma asserção é que a sentença asserida é verdadeira. Como já indicado, Dummett está certo ao dizer que o intuicionista é capaz de explicar de seu ponto de vista as condições para a asserção de sentenças matemáticas em termos apenas da noção de prova, sem invocar qualquer noção de verdade.<sup>7</sup>

Mas o que seria, para Prawitz, esse conteúdo da asserção, distinto dos compromissos que assumimos com a asserção? Como vimos, a resposta de Prawitz é que “o conteúdo de uma asserção é simplesmente que a sentença asserida é verdadeira”, e que esse “conteúdo da asserção” deveria ser analisado como “a sentença asserida é verificável”. Logo, segundo Prawitz, a noção “ser verdadeira” seria explicada pela noção “ser verificável”.

A proposta parece satisfazer a primeira condição mínima, a saber, a da não redutibilidade da noção de verdade à de asserção justificada. De fato, a distinção conteúdo da asserção/comprometimentos da asserção visa precisamente garantir essa diferença. No entanto, não vemos muito sentido em falar da *sentença* asserida como sendo verificável: não é a sentença asserida que é verificável, mas o que é asserido com a sentença, ou, minimamente, é a sen-

7 Dag Prawitz, op. cit., pg. 46.

tença juntamente com aquilo que asseve que é verificável, i.e., é ao seu conteúdo (ou à sentença com um determinado conteúdo) que atribuímos a verificabilidade. Mas, se é assim, andamos em círculo ao tentar definir o conteúdo pela própria verificabilidade.

Mas o que podemos afirmar com respeito à segunda condição mínima? Afinal de contas, a noção de “verificabilidade” parece depender de um tipo de “existência abstrata” de provas com um alto teor realista. Uma crítica imediata que, do ponto de vista construtivo, poderíamos fazer, é que a “idéia de provas existindo (em abstrato) independentemente de serem encontradas” re-introduz um elemento realista (talvez re-introduza mesmo um realismo radical). A resposta de Prawitz a essa crítica é dada em dois passos:

1. A noção de prova não admite a possibilidade de provas que em princípio não poderiam ser conhecidas (por nós).
2. As condições para que se fizesse a asserção da disjunção “ou existe uma prova de A ou não existe uma prova de A” continuariam exigindo uma prova de um dos disjuntos.

Para Prawitz, a noção de demonstrabilidade e, conseqüentemente, a noção de verdade, herdariam as mesmas características que tornam a questão “Isto é uma prova dessa sentença?” objetivamente determinada. A interessante relação entre essa noção de *existência abstrata* e o conceito modal de *possibilidade* é o tema da parte final deste artigo.

### Parte 3 - A Compreensão Construtiva da Modalidade da Possibilidade

Na seção anterior estivemos discutindo, ainda que de maneira breve, a proposta de Prawitz segundo a qual a noção de verdade deveria ser distinguida da noção de asserção justificada, pois deveríamos poder falar no conteúdo assertórico de uma afirmação (de uma conjectura, por exemplo) de forma independente de sua prova. Nessa última parte do artigo, concentraremos nossa atenção em uma outra noção que desempenha um papel fundamental nos argumentos, não somente de Prawitz, mas dos intuicionistas contemporâneos em geral: a noção modal de “possibilidade”. Nosso interesse principal estará voltado para a exploração do papel exato que esse conceito é chamado a desempenhar na caracterização oferecida por esses autores para a relação entre *prova* e *verdade*.

Desde um ponto de vista modal, uma das características mais marcantes do intuicionismo, tanto na versão clássica de Brouwer, quanto na versão contemporânea, parece ser a insistência em um traço *atualista* na formulação da conexão entre a noção de prova e a noção de verdade. Podemos encontrar uma manifestação bem clara dessa tendência em uma formulação muito direta de Martin-Löf para essa conexão:

Intuicionisticamente, a verdade de uma proposição é analisada como a existência de uma prova: uma proposição é verdadeira se existe uma prova dela.<sup>8</sup>

A noção de verdade aparece na formulação de Martin-Löf fortemente atrelada à noção de “existência de uma prova”: uma proposição é verdadeira se, e apenas se, existe uma prova dessa proposição, se a *temos em mãos*, ou seja, atrelada à existência concreta de um objeto espaço-temporal: a prova “*atualmente*” dada.

Essa insistência inicial no que chamamos de traço atualista na formulação intuicionista da conexão prova/verdade é, no entanto, imediatamente qualificada por esses autores. Um contato ainda que superficial com os textos dos intuicionistas contemporâneos nos revela que a conexão entre a verdade e a noção de “existência concreta de uma prova” é mais sutil, no entanto, do que parece a princípio, e claramente não exaure a posição construtivista. De fato, logo percebemos que esse atualismo, a exigência da posse concreta da prova, pode, em certos momentos, ser *relaxado*. Como veremos, o intuicionismo contemporâneo aceita que, em alguns casos, possamos mesmo abrir mão da exigência da existência concreta (atual) de uma prova.

Vejamos um trecho de Prawitz:

A explicação standard da disjunção é que uma construção é uma prova de  $(A \vee B)$  somente no caso de ser uma prova ou bem de A, ou bem de B. A despeito disso, normalmente não consideramos legítimo afirmar uma disjunção, digamos, ao longo de uma prova, apenas quando nós temos concretamente (*actually have*) uma prova de um ou de outro dos disjuntos. Por exemplo, estaria perfeitamente em ordem asserirmos que

$$10^{10} + 1 \text{ é primo ou composto}$$

sem sermos capazes de dizer qual alternativa se dá.<sup>9</sup>

8 Per Martin-Löf, “A path from logic to metaphysics”, pg. 141.

9 Michael Dummett, “The philosophical basis of Intuitionistic Logic”, em *Truth and other enigmas*, pg. 239.

O que encontramos na passagem acima é a bem conhecida distinção entre um sentido primitivo de prova, exemplificado pelas chamadas *provas canônicas*, e um sentido derivado de prova, as chamadas *provas indiretas, não-canônicas* (ou simplesmente *demonstrações*). As provas do tipo primitivo – as provas canônicas – são normalmente caracterizadas por esses autores como desempenhando um papel central na própria “determinação do sentido de noções lógico-matemáticas”.<sup>10</sup>

Por outro lado, o tipo derivado de provas – as provas não-canônicas – introduziria uma espécie de *prova em segunda ordem*. Deixaríamos de exigir diretamente a existência *concreta (atual)* de uma prova canônica, nos contentando com a existência (concreta/atual) agora apenas de um *método para obtermos uma tal prova canônica*. Per Martin-Löf, por exemplo, afirma que:

...conhecer uma prova indireta de uma proposição é saber como fornecer uma prova direta da mesma.<sup>11</sup>

A mesma idéia de prova não-canônica (uma *simples demonstração*) como um método efetivo para obtermos uma prova canônica aparece também em Dummett:

Em geral, uma demonstração [i.e. uma prova não-canônica] consiste em qualquer coisa que possamos reconhecer como sendo um procedimento efetivo para encontrar uma prova canônica.<sup>12</sup>

Não pretendemos aqui realizar uma exploração detalhada da(s) distinção(ões) entre provas *canônicas* e provas *não-canônicas*. O que nos interessa nessa distinção é a introdução, na caracterização da própria noção de verdade, de uma noção modal, a noção de *possibilidade*. Com o auxílio da modalidade do possível podemos caracterizar as provas não-canônicas como provas não diretamente *atuais* de uma proposição matemática, mas como provas (apenas) da *possibilidade* de virmos a ter em mãos uma prova canônica. O recurso modal fica bem claro na formulação (contrafactual) que encontramos em Dummett:

10 Michael Dummett. *The Logical Basis of Metaphysics*. pg. 177.

11 Martin-Löf, Per, “Truth of a proposition, evidence of a judgment, validity of a proof”, pg. 413.

12 Michael Dummett, *Logical Basis of Metaphysics*, pg. 177.

Um enunciado pode frequentemente ser estabelecido por meios indiretos; mas rotular certos meios de “canônicos” é alegar que, sempre que estivermos justificados a asserir o enunciado, *podertamos ter chegado* ao nosso direito de fazê-lo pelos métodos restritos.<sup>13</sup>

Esse recurso à noção modal de possibilidade fica ainda mais explícito na seguinte formulação de Martin-Löf:

...uma proposição é atualmente verdadeira significa que ela foi provada, enquanto que dizer que uma proposição A é potencialmente verdadeira é dizer que A *pode ser provada*, ou seja, que *uma prova de A pode ser construída*. (...) a noção de verdade potencial é a noção de verdade que aparece nos trabalhos de Dummett, Prawitz e Putnam a partir do final da década de setenta.<sup>14</sup>

Chegamos aqui ao problema fundamental com o qual estaremos envolvidos no restante de nosso artigo. Como vimos, a distinção canônico/não-canônico recorre a noção modal possibilidade para a própria definição construtiva de verdade. Frente a isso, nos confrontamos com duas dificuldades:

1) De qual noção de possibilidade estamos falando?

e, mais importante ainda,

2) Que justificativa filosófica podemos oferecer para a noção modal escolhida?

Desde Aristóteles<sup>15</sup> estamos acostumados a distinguir dois sentidos de “possibilidade”; um sentido mais restrito e outro mais lato. O mais restrito é:

*Possibilidade Real*: Dito de uma proposição, afirma que essa pode vir a ser o caso, pode vir a ser verdadeira.

O outro mais amplo é:

<sup>13</sup> Michael Dummett, op. cit., pg. 252, nosso grifo.

<sup>14</sup> Per Martin Löf, “A path from logic to metaphysics”, pg. 142, nosso grifo.

<sup>15</sup> Aristóteles, *Metafísica*. Livro V, 12, 1020b4.

*Possibilidade lógica*: Afirma tão somente a não-contraditoriedade de uma afirmação.

A partir dessas caracterizações, podemos agora reformular nossa primeira pergunta, tornando-a um pouco mais específica:

1\*) Quando os intuicionistas contemporâneos apelam à noção de possibilidade (ao caracterizarem a noção de prova não-canônica como uma demonstração de que é possível obter uma prova canônica da proposição em questão), eles estão falando de uma possibilidade *real* ou de uma possibilidade *lógica*?

Apesar de que, como veremos mais adiante, encontremos trechos em que os intuicionistas contemporâneos *expressamente elegem a noção de possibilidade lógica* como sendo aquela por eles empregada, ainda assim, essa escolha não nos parece ser a opção mais natural, principalmente quando pensamos na *justificativa filosófica* por eles mesmos apresentada. Como passaremos a argumentar, é nossa opinião que haveria bons motivos para que essa escolha recaísse sobre a noção de *possibilidade real*.

Repassemos brevemente o percurso que realizamos até aqui. Constatamos que em certos casos, os intuicionistas estariam dispostos a abrir mão de sua exigência da existência concreta/atual de uma prova. Em seguida, verificamos que essa liberalização na tendência atualista do intuicionismo contemporâneo está na base da distinção entre provas canônicas e provas não-canônicas. Assim, a existência concreta de que os intuicionistas estariam dispostos a abrir mão envolveria apenas as *provas canônicas*; continuaríamos exigindo sempre a posse (concreta) de *demonstrações não-canônicas*. Isso porque essas últimas seriam caracterizadas como *provas de que a prova canônica envolvida poderia ser construída*. Mais especificamente, como vimos, uma prova não-canônica envolveria a posse (concreta) de um método para construirmos uma prova canônica.

Vejamos agora a justificativa filosófica apresentada para esse relaxamento da exigência de existência concreta/atual (para o caso das provas canônicas). A idéia parece ser, novamente, de *caráter modal, contrafactual*: na posse (concreta) de um método efetivo, caso viéssemos a precisar da posse concreta da prova canônica, bastaria atualizar o tal método para que obtivéssemos a prova desejada. Ou seja, abrirmos mão da posse concreta da prova canônica, apenas porque estaríamos de posse (concreta) de uma demonstração de que uma prova assim *poderia ser obtida*, i.e., poderia ser concretizada/atualizada:

O que torna legítimo, na visão intuicionista standard, é que temos um método que é, em princípio, efetivo para decidirmos qual das duas alternativas é correta: *se nós quiséssemos nos dar ao trabalho de aplicarmos esse método, o apelo a um argumento por casos poderia ser dispensado*.<sup>16</sup>

Apesar da referência a uma efetividade apenas “em princípio” do método (na obtenção da prova direta), a fundamentação contrafactual aparece de forma bem clara na citação acima: *caso quiséssemos* poderíamos ter em mãos (i.e., concretamente) a prova *canônica* (e assim, dispensar o argumento por casos).

Verificamos assim, claramente, que, a despeito da distinção *canônico/não-canônico*, a noção de verdade *continua fortemente atrelada à noção de existência concreta*. Uma afirmação é verdadeira porque ou bem temos uma prova concreta (canônica) da mesma, ou bem porque sabemos como poderíamos obter uma prova assim:

A solução intuicionista para essas dificuldades parece óbvia: a condição para asserir-se uma sentença é que ou bem sabemos uma prova da sentença do tipo mencionado na definição intuicionista de prova [i.e., uma prova canônica] ou bem sabemos *um procedimento para obtenção dessa prova*.<sup>17</sup>

Diferentemente do que talvez tenhamos deixado a entender no início de nosso artigo, a distinção entre as noções de verdade e de assertabilidade justificada não é um fenômeno recente no intuicionismo contemporâneo. Já em seu famoso artigo de “The philosophical basis of Intuitionistic Logic” de 1973, Dummett já falava em *divórcio entre as noções de verdade e assertabilidade*:

Existe alguma estranheza sobre essa maneira de encararmos as disjunções e quantificações existenciais, a saber, no divórcio entre as noções de *verdade* e *assertabilidade*. (...) No entanto, permanece verdadeiro que, (...) a noção de verdade de um enunciado matemático *consiste em nossa posse de uma prova canônica deste*, enquanto que sua asserção não precisa ser baseada em mais do que em uma demonstração.<sup>18</sup>

16 Michael Dummett, “The philosophical basis of Intuitionistic Logic”, em *Truth and other enigmas*, pg. 239, grifo nosso.

17 Prawitz, Dag, “Meaning and Proof: On the conflict between classical and intuitionistic logic”, pg. 22, nosso grifo.

18 Michael Dummett, op. cit., pg. 240, nosso grifo.

De fato, esse divórcio entre *condições da asserção e verdade* já aparecia claramente na própria justificativa filosófica para a distinção canônico/não-canônico. A noção de *verdade* deveria ser identificada apenas com a posse concreta de uma *prova canônica*; a própria justificação para a asserção de provas não-canônicas decorreria do funcionamento dessas provas como meios efetivos para a obtenção das provas canônicas correspondentes.

Frente a essa situação, voltemos ao problema de qual é a noção modal operante nessas formulações. Nosso argumento é bem simples: se a justificativa para a aceitação de uma prova não canônica remete a posse concreta de uma prova canônica, então pareceria que a *única noção de possibilidade capaz de assegurar tal posse concreta* seria a noção de possibilidade real. Dito de outra forma, se o que legitima uma prova indireta é a possibilidade de nossa posse *concreta* de uma prova canônica, então jamais deveríamos aceitar uma prova indireta que nos assegurasse, digamos, a possibilidade de existência *apenas abstrata* da prova direta. Assim, nunca deveríamos aceitar uma demonstração da possibilidade *meramente lógica* de existência que, digamos, ao mesmo tempo, envolvesse uma *impossibilidade real* de ser executada. Tal prova não nos asseguraria a possibilidade de termos concretamente uma prova canônica *em nossas mãos*, apenas sua *posse em princípio*.

Enfocando o assunto ainda de uma outra maneira, dada a conexão direta defendida por Dummett entre verdade e a existência concreta da prova canônica (correspondente), a perda do caráter concreto das provas canônicas poria em risco a *própria conexão entre prova e o próprio conceito de “verdade”!*

Como acabamos de ver, o intuicionismo introduz explicitamente a noção de possibilidade lógica como a noção modal operante em suas explicações da distinção canônico e não-canônico, diferenciando o que podemos “em princípio” fazer, do que podemos “de fato” fazer. O problema que naturalmente surge aqui é: como compreender construtivamente essa noção de possibilidade lógica? Uma resposta “técnica” poderia ser: temos semânticas para a Lógica Modal Intuicionista! Obviamente essa resposta não é satisfatória. Em primeiro lugar, diferentemente do que ocorre com as Lógicas Modais Clássicas, não temos sistemas *canônicos* para as lógicas modais intuicionista. Como trabalhamos com duas relações de acessibilidade (a relação de acessibilidade para os operadores modais e a relação de ordem para os operadores proposicionais intuicionistas), são múltiplas as possibilidades de combinação para essas relações, e essas diferentes combinações não validam os mesmos princípios. Por exemplo, a expressão  $(\Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B))$  não é derivável no sistema  $S_4$  intuicionista definido por Prawitz em *Natural Deduction*, mas é derivável no

sistema definido por Alex Simpson em *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*. Obviamente, não temos condições de determinar que princípios manter (validar), a não ser por meio de um outro tipo de considerações semânticas. Em segundo lugar, e esse talvez seja o problema mais agudo, as semânticas propostas, como é bem sabido, são clássicas, o que apresenta graves entraves conceituais para o programa construtivista.

Como antecipamos acima, os intuicionistas contemporâneos não elegem a noção de possibilidade real como aquela operante em suas explicações. Segundo eles, a noção mais forte de possibilidade lógica é a noção adequada. Martin-Löf, por exemplo, afirma claramente sua adesão à noção lógica de possibilidade:

A respeito dessa noção de possibilidade, não tenho nada mais a dizer, salvo que se trata da noção de *possibilidade lógica*, ou *possibilidade em princípio*, em contraste com *possibilidade real ou prática*, possibilidade que leva em consideração os recursos e assim por diante. (...) eu sou tão dependente como ele [Schlick] era da noção de possibilidade lógica, ou possibilidade em princípio, assim vou me permitir o seu uso sem mais delonga nessa discussão.<sup>19</sup>

Ora, as conseqüências dessa opção se fazem sentir imediatamente: uma vez assumida a noção mais ampla de possibilidade – a noção lógica – não temos mais como assegurar que uma prova não canônica nos ofereça a possibilidade de *existência concreta* da prova canônica correspondente. Temos então que, coerentemente, nos contentar com uma noção mais *fraca* de existência, uma noção de existência “*em princípio*” ou meramente “*abstrata*”. Assim, não deve nos causar surpresa o comprometimento do intuicionismo contemporâneo também com a noção correspondente à de “possibilidade lógica”, a saber, a noção de “*existência meramente abstrata*”. Em um artigo de Prawitz encontramos a seguinte passagem:

De um ponto de vista intuicionista, é necessário que *exista em um sentido abstrato* cálculos como  $768 + 859 = 859 + 768$  e de  $10^{10} \cdot 10^{10} = 100.000.000.000.000.000.000 = 10^{20}$  (...) para que seja correto afirmar-se que  $768 + 859 = 859 + 768$ .<sup>20</sup>

19 Martin Löf, Per, “Verificationism Then and Now”, pg. 193, nosso grifo.

20 Dag Prawitz, op. cit., pg. 21, nosso grifo.

Mais uma vez, no entanto, voltamos ao problema da justificação filosófica de nossa escolha. A introdução dessa noção de existência meramente abstrata é conflitante com a ênfase intuicionista no que chamamos de concepção atualista da verdade como posse (concreta, é claro) de uma prova (canônica). Como já citamos acima, Dummett é bem claro a esse respeito:

...a noção de verdade de um enunciado matemático consiste em nossa posse de uma prova canônica deste.<sup>21</sup>

Antes de passarmos ao último ponto de nossa discussão – que razões levam os intuicionistas a insistir em sua opção pela noção lógica de possibilidade – gostaríamos de mencionar, ainda que rapidamente, uma outra dificuldade para a posição intuicionista. É comum encontrarmos nos textos intuicionistas a sugestão de que as demonstrações não canônicas têm que nos fornecer um método *efetivo* que nos permita obter as provas canônicas correspondentes. A pergunta natural aqui é: qual é a noção de *efetividade* empregada?

Uma possível forma de compreensão do adjetivo “efetivo” poderia nos levar a pensar que estivesse indicando que tal método deveria nos fornecer uma *possibilidade real* de atingirmos (concretamente) a prova canônica correspondente. Como sabemos, não é essa a intenção dos autores. Claramente, a referência mais imediata aqui seria à moderna *Teoria da Computabilidade*, tal como desenvolvida por Turing e outros desde a década de trinta do século passado. Assim, o adjetivo “efetivo” indicaria que (1) temos um procedimento puramente mecânico para chegarmos à prova canônica, ou que, usando uma caracterização muito comum, existe uma máquina de Turing que poderia executá-lo, e que (2) esse procedimento termina, existe um fim para nosso cálculo.

A dificuldade que estamos apontando é simples e já foi percebida por muitos construtivistas<sup>22</sup>: as duas quantificações existenciais que usamos em nossa caracterização de método efetivo deveriam ser entendidas *classicamente*. Como observa o próprio Prawitz, a opção por compreender intuicionisticamente esses quantificadores nos levaria a um regresso ao infinito:

Poderíamos nos perguntar se esse conhecimento não deveria consistir na descrição do procedimento junto com uma prova de que esse procedimento tem a proprie-

21 Michael Dummett, op. cit., pg. 240, nosso grifo.

22 Ver, por exemplo, Thoralf Skolem, “Sobre la naturaleza del razonamiento matemático”, pg. 122 em diante. O Próprio Prawitz menciona Rosza Peter, *Rekursivität und Konstruktivität*.

dade requerida (...) Mas isso nos levaria a um regresso ao infinito e destruiria todo o projeto de uma teoria do significado como a proposta aqui.

Parece que a noção de procedimento construtivo usada aqui deve ser tomada como primitiva. (...) não é possível defini-la como uma máquina de Turing que sempre produz um resultado quando aplicada a um argumento; o prefixo quantificacional  $\forall\exists$  nessa definição tem que ser entendido intuicionisticamente, e isso significa que para compreendermos a definição devemos já saber qual tal é esse procedimento construtivo.<sup>23</sup>

Não pretendemos explorar aqui os vários aspectos que a questão da relação entre a proposta intuicionista e a teoria (clássica) da computabilidade envolve. Isso estaria para além do escopo de nossa investigação no momento. Gostaríamos apenas de chamar atenção para um fato: se a noção de computabilidade clássica não está sendo invocada pelo adjetivo “*efetivo*”, não está claro qual seria exatamente o papel desempenhado por esse adjetivo quando estamos falando dentro de um contexto intuicionista. Aparentemente, a possibilidade de entendê-lo como se referindo a moderna teoria da computabilidade mereceria, pelo menos, uma discussão mais cuidadosa. Além disso, a opção de tomá-lo como se referindo a exigência de uma possibilidade real de obtenção de uma prova canônica já teria sido explicitamente descartada.

De certa forma, os problemas levantados aqui não são novos. Vários autores já argumentaram no sentido de que, dada a fundamentação filosófica proposta pelos intuicionistas contemporâneos, seria mais natural abrir mão da noção de possibilidade lógica e defender, não mais o intuicionismo, mas uma posição mais radical, o assim chamado *finitismo estrito*:

...argumentos essencialmente análogos àqueles que os intuicionistas matemáticos usam para justificar sua revisão da lógica clássica e da matemática, pelo menos quando sua defesa é apresentada da maneira em que Dummett recomenda, levam a uma visão ainda mais radical, a do finitismo estrito.<sup>24</sup>

Por que então os intuicionistas contemporâneos insistem em noções de sabor claramente idealizante como as de *verificação em princípio*, *existência abstrata* e *possibilidade meramente lógica*? A resposta é bastante óbvia e tem um caráter claramente instrumental: a proposta finitista estrita seria por demais radical e

<sup>23</sup> Prawitz, Dag, op. cit., pg. 27.

<sup>24</sup> Crispin Wright, “Strict Finitism”, em *Realism, Meaning and Truth*, pg. 107. Ver também Sören Stenlund, *Language and Philosophical Problems*, pg. 146 em diante.

podaria a matemática a um ponto muito além do que estaríamos preparados a admitir. Assim, em um longo artigo dedicado à proposta do *finitismo estrito*, Dummett argumenta que essa posição filosófico-matemática nem sequer é consistente<sup>25</sup>, um argumento muito semelhante ao apresentado pelo próprio Dummett contra a proposta para a matemática que ele acredita ser de Wittgenstein.<sup>26</sup>

Não discutiremos aqui a correção da acusação de Dummett às propostas de Wittgenstein. Aparentemente os intuicionistas contemporâneos encontram-se em uma situação muito semelhante à de Russell com seu *axioma da reducibilidade*. Sem aquele axioma (ou aquela noção de possibilidade mais forte) esses autores acreditam que não seria possível a apresentação de uma proposta *tecnicamente viável* para a matemática. Mas da mesma forma que no caso de Russell (alvo das críticas ferinas de Wittgenstein), uma justificação assim não poderia jamais esconder seu caráter *ad hoc*. Esse caráter *ad hoc* pareceria ser particularmente inapropriado para uma proposta que envolve, como sabemos, uma revisão de várias áreas da matemática contemporânea (considerada por muitos matemáticos clássicos como sendo por demais radical e amarga) em prol de uma maior *clareza de fundamentação filosófica*. Em outras palavras, como o próprio Dummett enfatiza, a fundamentação filosófica não pode ser tratada como *assessória* em uma proposta como a do intuicionismo:

O intuicionismo jamais terá sucesso em sua luta contra formas de matemática rivais e mais largamente aceitas, salvo se consiga vencer a batalha filosófica. Se algum dia ele perder esta batalha, a própria prática da matemática intuicionista e o estudo meta-matemático dos sistemas intuicionistas tornar-se-ão, ambos, uma perda de tempo.<sup>27</sup>

Não consideramos, de forma alguma, que nossas considerações sobre a elucidação filosófica intuicionista das noções de “prova” e de “verdade” envolvam propostas positivas ou argumentos conclusivos. Longe disso, entendemos apenas que elas apontam para uma necessidade urgente de um esclarecimento conceitual mais elaborado e de um maior cuidado no trato e justificação de argumentos envolvendo noções modais.

25 Michael Dummett, “Wang’s Paradox”, em *Truth and Other Enigmas*. Ver principalmente a conclusão final, pg. 268.

26 Michael Dummett, “Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics”, em *Truth and Other Enigmas*, pg. 182.

27 Michael Dummett, *Elements of Intuitionism*, pg. viii.

**Referências bibliográficas:**

Aristóteles - *Metafísica*, Livro V, 12, 1020b.

Dummett, Michael - *Elements of Intuitionism*. Claredon, Oxford, 1977  
 - *Truth and other enigmas*. Harvard, Cambridge, 1978.  
 - *Logical Basis of Metaphysics*. Harvard, Cambridge, 1991.  
 - *The Seas of Language*. Harvard, Cambridge, 1993.  
 - "Truth from the Constructive Standpoint", em *Theoria*, Volume LXIV, 1998, pgs. 122-138.

Gentzen, Gerhard - *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, ed. M Szabo, North-Holland, Amsterdam, 1969.

Martin-Löf, Per - "On the meanings of the logical constants", em *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol 1, no 1, pgs 11-60.  
 - "Truth of a proposition, evidence of a judgment, validity of a proof", *Synthese*, 73, 1987, pgs. 407-20.  
 - "A path from logic to metaphysics", em *Atti dei Congresso Nuovi Problemi della logica e della filosofia della scienza.*, Viareggio, 1990, pgs. 141-49.  
 - "Verificationism Then and Now", em *The Foundational Debate*, eds. Depauli-Schmanovich et al.1995.

Peter, Rozsa - "Rekursivität und Konstruktivität", em *Constructivity in mathematics*, ed. A.Heiting, North-Holland, Amsterdam, 1959, pgs 226-233

Prawitz, Dag - "The conflict between classical and Intuitionistic logic", em *Theoria*, vol. XLIII, 1977, pg. 2-39.  
 - "Truth and objectivity from a verificationist point of view", em *Truth in Mathematics*, eds. H.G. Dales & al., Claredon, Oxford, 1998..

Simpson, Alex - *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, Tese de Doutorado, Universidade de Edinburgh, 1994.

Skolem, Thoralf - "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático", em *Publicaciones del Instituto de Matemática Jorge Juan*, Madrid, Gac. Mat, n° 4, 1952, pgs. 113-124.

Stenlund, Sören - *Language and Philosophical Problems*, Routledge, Londres, 1990.

Wright, Crispin - *Realism, Meaning and Truth*. Blackwell, Londres, 1992.

## Aos Colaboradores

- 1 As colaborações para esta revista devem ser enviadas em três cópias para o seguinte endereço:

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Departamento de Filosofia  
Rua Marquês de São Vicente 225, 1149L  
Gávea  
22453-900 – Rio de Janeiro, RJ

- 2 Os artigos escritos em qualquer versão do *WinWord* poderão ser mandados em disquete (3.5"). Os demais devem ser datilografados ou impressos em espaço duplo, sem uso do verso do papel e, em princípio, devem constar de, no máximo, 30 laudas (de 30 linhas com 70 toques por linha). A editoria se reserva o direito de, excepcionalmente, aceitar trabalhos que excedam esse limite.
- 3 Não há obrigatoriedade de que o artigo não tenha ainda sido publicado. Em caso de prévia publicação da colaboração que nos for enviada, solicitamos que seja citado o nome e data da publicação onde originalmente apareceu, e que haja a devida aceitação de seus editores.
- 4 Artigos em espanhol, francês e inglês serão aceitos.
- 5 Os autores serão informados sobre a aceitação de seus artigos (favor enviar endereço para contato). Essa aceitação, entretanto, não implica necessariamente na publicação no número seguinte ou em algum número determinado da revista. Sendo estritamente acadêmica, a revista [o que nos faz pensar] não tem como critério de publicação a ordem cronológica em que recebe ou aprova artigos.

Dos Modelos de Análise Filosófica  
Abel Lassalle Casanova

Conhecimento e Estruturas Matemáticas  
Arno Viero

Desenvolvimentos Recentes  
na Teoria dos Atos de Fala  
Davião Marcondes

Proof and Proving  
Oswaldo Chateaubriand

Vagueza De Re  
Marco Ruffino

Elementos de uma Interpretação  
Fenomenológica da Negação  
Róbson Reis

O Papel das Classes Próprias  
na Fundamentação das Ciências Formais  
Frank Sauter

Algumas Considerações sobre a  
Noção Construtiva de Verdade  
Aodete da Silva Porto e Luiz Carlos Pereira