Normalização para a Lógica Clássica[1]

Luiz Carlos P. D. Pereira e Cosme Massi

Em teoria da prova, temos três tipos de resultados fundamentais sobre a forma que derivações pertencentes a um dado sistema formal S podem assumir :

(I) Teorema da Forma Normal : Toda derivação em S possui uma forma normal.

(II) Teorema da Normalização : Dada uma derivação em S, podemos efetivamente obter sua forma normal através de certas operações chamadas de « reduções ».

(III) Teorema da Normalização Forte : Dada uma derivação em S, sua forma normal é única, e sempre pode ser obtida após um número finito de reduções, independentemente da ordem em que as mesmas são aplicadas.

Se denotamos por C a formulação em **Dedução Natural da Lógica Clássica** (Prawitz (2)), é bem sabido que temos resultados de normalização e normalização forte para o fragmento $\{\forall, \wedge, \rightarrow, \bot\}$ C′ de C. Normalização para C′ assume a seguinte forma :

Seja π uma derivação em C′. Então π pode ser efetivamente transformada em uma derivação π' tal que :

1 Este artigo foi apresentado no III Encontro Nacional de Filosofia promovido pela Associação Nacional de Filosofia — ANPOF, realizado em Gramado, RS., em Setembro de 1988. O mesmo resultado foi obtido independentemente por Göran Sundholm, da Universidade de Estocolmo, usando uma técnica ligeiramente diferente.

(I) Toda aplicação da regra do absurdo clássico em π' tem conseqüência atômica.

(II) π' está em forma normal.

Em 1968, Prawitz & Malmnäs assumem explicitamente um teorema de normalização para o sistema completo C, mas nenhuma prova é fornecida. A primeira prova de normalização para C data de 1974, e deve-se a Richard Statman (4). O autor utiliza um conceito modificado de forma normal onde são permitidas aplicações do absurdo clássico cujas conclusões não são premissas maiores de regras de eliminação. A prova é obtida através da imersão da Lógica Clássica de 2ª ordem em um outro sistema.

Em 1980, N. Tennant propôs uma prova direta do mesmo resultado, mas, infelizmente, houve uma falha em sua demonstração. Em particular, a proposição enunciada no parágrafo 4, p. 195, está incorreta.

O objetivo do presente artigo é fornecer, de forma abreviada, uma prova direta do teorema da normalização para a Lógica de 1ª ordem clássica. Além do seu interesse intrínseco e de sua aplicação no artigo (3) mencionado acima, gostaríamos de indicar outras áreas onde um resultado de normalização para C poderia ser útil :

(I) Dado um resultado de normalização para C, a possibilidade de se desenvolver uma semântica baseada em regras de uso (i. e., regras de inferência) é ampliada.

(II) Como é bem sabido, se estamos interessados em Lógicas Não-Clássicas, como a lógica da Relevância, então, existe uma perda considerável na exclusão da disjunção e do quantificador existencial. Portanto, qualquer tratamento em termos de prova iria requerer um teorema da normalização para o sistema C.

(III) Um teorema de normalização para C poderia ser útil na formulação de módulos tradutores a serem acoplados a provadores automáticos de teorema (ver Haeusler (1)).

Algumas Definições e as Novas Reduções

Um segmento de ocorrências $B_1, ..., B_n$ em uma derivação π é chamado de segmento máximo, se ele satisfaz uma das seguintes cláusulas :

(a) $n = 1$

(I) $B_1 = B_n$ é a conclusão de uma regra de introdução ou da regra do absurdo intuicionista e, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação.

(II) $B_1=B_n$ é a conclusão de uma aplicação do absurdo clássico e, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação.

(III) $B_1=B_n$ é a conclusão de uma aplicação do absurdo clássico e, ao mesmo tempo, a premissa menor de uma aplicação de eliminação cuja premissa maior é uma hipótese.

(b) $n>1$

(I) B_n é a conclusão de uma aplicação de $\vee$-eliminação ou de $\exists$-eliminação e, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação.

(II) B_n é a conclusão de uma aplicação de v-eliminação ou de $\exists$-eliminação e, ao mesmo tempo, premissa menor de uma aplicação de $\rightarrow$-eliminação cuja premissa maior é uma hipótese.

Uma derivação é dita normal se ela não contém nenhum segmento máximo. O grau de uma derivação π, denotado por $d(\pi)$, é definido como o grau do segmento máximo mais complexo de tipo (a.i,ii) ou (b.i).

Além das reduções usuais, temos as seguintes operações :

Reduções do Absurdo Clássico

1.

$$\dfrac{i\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \pi\\ \bot\end{array}}{A} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ B_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Sigma_n\\ B_n\end{array}}{B} \qquad \text{reduz-se a :} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^i[A]\quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ B_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Sigma_n\\ B_n\end{array}}{B}\quad [\neg A]^j}{\bot}\,i}{[\neg A]}\\ \pi^*_j\\ \dfrac{\bot}{B}\end{array}$$

onde :

1. A fórmula A é a premissa maior de uma eliminação com premissas menores $B_1, ..., B_n$.

2. π^*_j é o resultado da substituição de toda subderivação de π da forma :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ A\end{array}\quad \neg A^i}{\bot} \qquad \text{por} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ B_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Sigma_n\\ B_n\end{array}}{B}\quad \neg B^j}{\bot}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \pi\\ \bot\end{array}}{A} \qquad \neg A}{\bot} \qquad \text{reduz-se a :} \qquad \begin{array}{c}\neg A\\ \pi\\ \bot\end{array}$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \pi_2\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \pi_3\\ C\end{array}}{C} \qquad \neg C}{\bot}$$

reduz-se a :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A\vee B\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \pi_2\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \pi_3\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \exists xA(x)\end{array} \quad \begin{array}{c}[A(b)]\\ \pi_2\\ C\end{array}}{C} \qquad \neg C}{\bot}$$

reduz-se a :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \exists xA(x)\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A(b)]\\ \pi_2\\ C\end{array} \quad \neg C}{\bot}}{\bot}$$

Resultados

Lema 1 : Seja π uma derivação de $\Gamma \vdash A$ tal que $d(\pi)= n$ e todo segmento máximo de grau n que contribui para o grau de π é do tipo (a.i.). Então, π reduz-se a uma derivação π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash A$ tal que $d(p') < d(p)$.

Prova : como em Prawitz (2)

Lema 2 : Toda derivação π tal que $d(\pi)= 0$ reduz-se a uma derivação normal π'.

Prova : Se π é normal, então $\pi' \equiv \pi$.
Se π não é normal, então o resultado é obtido, como em Prawitz (2), utilizando-se as reduções do absurdo.

Lema 3 : Seja π uma derivação de $\Gamma \vdash B$ tal que :
(I) a última regra de π é uma eliminação cujá premissa maior é o único segmento máximo em π.
(II) $d(\pi) > 0$.
Então, π reduz-se a uma derivação π' de $\Delta \subseteq \Gamma \subseteq \vdash B$ tal que $d(\pi') < d(\pi)$.

Prova : Indução sobre o comprimento de π.

Teorema (Normalização) : Seja π uma derivação de $\Gamma \vdash A$. Então, π reduz-se a uma derivação normal π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash A$.

Prova : Indução sobre os valores,

$$\omega^{\alpha_1}.\,\beta_1 + \ldots + \omega^{\alpha_n}.\,\beta_n$$

Tal que :

(1) $\alpha_1 > \ldots > \alpha_n$
(2) Cada α_i ($1 \leq i \leq n$) é o grau de um segmento máximo de tipo (a.i,ii) ou b.i), e o grau de todo segmento máximo é representado por um α_i.
(3) β_i é o número de segmentos máximos de grau α_i.

Bibliografia

(1) Haeusler, E.H., **Processos de Tradução de Resolução para Dedução Natural**, Dissertação de Mestrado, Depto. de Informática, PUC/RJ, 1986.
(2) Prawitz, D., **Natural Deduction**, Stockholm, 1965.
(3) Prawitz, D. & Malmnäs, P.E., « A Survey of Some Connections Between Classical Logic, Intuitionistic and Minimal Logic », em **Contributions to Mathematical Logic**, eds. A. Schmidt, K. Schutte and H.J. Thiele, North-Holland, Amsterdam, 1968.
(4) Statmam, R., **Structural Complexity of Proofs**, dissertação de Doutorado, Standford, 1974.
(5) Tennant,N., « A Proof-theoretical Aproach to Entailment », em **Journal of Philosophical Logic**, 9.