

A Linha Dupla e os Elementos Materiais

Desde 1990, o presente autor, junto com Prof. Glenn W. Erickson, tem desenvolvido uma interpretação da filosofia de Platão,¹ tomando como ponto de partida certas passagens matemáticas da sua obra. A pesquisa começou, de fato, com as nossas tentativas de explicar pontualmente várias dessas passagens, pois são apresentadas nos diálogos desse pensador de forma independente e em contextos independentes. Nossas soluções aos problemas de várias das referidas passagens, no entanto, revelaram relações surpreendentes entre esses, supostamente independentes, problemas. Isto nos levou a conjecturar que há uma estrutura matemática que unifica a terceira fase do pensamento platônico, a fase influenciada pela doutrina pitagórica. Em Erickson e Fossa (2006), a estrutura foi identificada como sendo a da Linha Dividida.

Infelizmente, a doutrina platônica sobre os Elementos Materiais não parecia enquadrar-se de forma natural na estrutura genética da Linha Dividida. O presente trabalho mostrará que a referida doutrina, de fato, é engendrada pela Linha Dividida. Para tanto faremos uma revisão rápida das doutrinas platônicas do Número Nupcial, do Número do Tirano, dos Elementos Materiais e da Linha Dividida, mostrando algumas das relações entre essas doutrinas e especificando a razão porque os Elementos Materiais não formam uma Linha Dividida. Em seguida, mostraremos (1) que os referidos Elementos formam uma Linha Dupla e (2) que as Linhas Duplas são geradas pelas Linhas Divididas. Os resultados (1) e (2) fazem com que a doutrina dos Elementos Materiais se enquadre na da Linha Dividida de forma satisfatória. Também mencionaremos como o resultado desse trabalho (3) é consoante com a interpretação neoplatônica da filosofia platônica, (3') nos ajuda a ver Aristóteles

* Professor do Depto. de Matemática da UFRN.

1 Ver Fossa e Erickson (1990).

como sucessor de Platão, em vez de oposto a ele, e (4) nos ajuda a ter uma apreciação maior do papel da matemática entre os pitagóricos em geral.

O Número Nupcial

O Número Nupcial, descrito no Livro VIII de *A República*, onde Platão o denominou de “número geométrico”, é uma figura geométrica, munida de comprimentos, cuja finalidade é determinar quando um casal deveria procriar para ter um filho de um determinado tipo de classe social (dirigentes, soldados e artesãos). A passagem é considerada extremamente enigmática. Fossa e Erickson (1994), no entanto, deram uma explicação (ver a Figura 1) em termos de combinações de triângulos. Dois triângulos adjacentes, formando um triângulo maior representam os pais, sendo o triângulo maior seu filho. Os comprimentos representam dias e a análise é feita em relação aos perímetros dos triângulos, a idade dos pais e a maturidade dos filhos. Para detalhes, ver Fossa e Erickson (1994), Erickson e Fossa (1996) ou Erickson e Fossa (2006). Para nossos propósitos no presente trabalho, será suficiente registrar o resultado (Figura 1).

Figura 1. O Número Nupcial (em dias).

O Número do Tirano

Encontra-se no Livro IX de *A República* outra passagem enigmática em que Platão afirma que a vida do rei é 729 vezes mais feliz do que a do tirano. Isto é conhecido como o Número do Tirano. Erickson e Fossa (1996) propõem uma pirâmide triangular para interpretar a referida passagem. As arestas da pirâmide progredem como potências de 3, 4 e 5, podendo a mesma ser reali-

zada como um fluxo aritmético tridimensional (para fluxos aritméticos, ver Capítulo 8 de Erickson e Fossa 2005). Também pode ser realizada geometricamente através de uma regra recursiva. O que é importante para nossos propósitos, porém, é que cada plano que corta a pirâmide nos nódulos 3^n , 4^n e 5^n é composto de vários triângulos. A Figura 2 apresenta a base da pirâmide (contendo os nódulos 3^6 , 4^6 e 5^6). Como a referida Figura mostra, o Número Nupcial está contido na base da pirâmide do Número do Tirano. De fato, está contido duas vezes, embora colocado em pé, e as duas cópias são dispostas num padrão cíclico sugerindo o mito do tempo cíclico.

Figura 2. A Base do Número do Tirano (A=972, B=1728 e C=3072).

A Proporção entre os Elementos Materiais

No *Timeu*, Platão explica que os Elementos Materiais estão em proporção continuada, ou seja,

Fogo:Ar::Ar:Água::Água:Terra

T. L. Heath (1956, v. 2, p. 294) insistiu, apesar do fato de Platão ter usado a palavra “sólido”, que os extremos, Fogo e Terra, fossem números cúbicos e, portanto, a proporção tomaria a seguinte forma:

$$x^3:x^2y::x^2y:xy^2::xy^2:y^3$$

F. M. Cornford (1977, p. 47-51) concordou com a análise de Heath e acrescentou que os números da proporção não são conhecidos, embora provavelmente representem os volumes totais de cada elemento. Fossa e Erickson (2000), porém, argumentam que a razão deveria ser uma quarta musical, 4:3, o que faria com que a proporção fosse

$$64:48::48:36::36:27$$

Ainda segundo Fossa e Erickson (2000), isto implicaria que os componentes dos sólidos, as suas arestas, tivessem valores fracionários. O resultado é completamente inapropriado do ponto de vista pitagórico assumido por Platão. Assim, as frações são eliminadas por multiplicar a proporção pelos denominadores, dando

$$3840:2880::2880:2160::2160:1620 \quad (=4:3)$$

Todos os quatro números são números sólidos, porém, não cúbicos, exatamente como Platão afirmou.

Mais importante, porém, a proporção indica que Fogo é 3840, Ar 2880, Água 2160 e Terra 1620. Mas, esses são exatamente os números que aparecem no topo do Número Nupcial, o que nos permitem a completar a Figura 1 da seguinte maneira (Figura 3):

Figura 3. A Abóbada dos Céus.

O resultado, ainda segundo Fossa e Erickson (2000), é uma representação da abóbada dos céus. Atribuindo as casas do zodíaco, em ordem, aos quatro Elementos Materiais, como estão dispostos na Figura 3, resulta nos trígonos da astrologia tradicional, que, por sinal, foi desenvolvida na Academia platônica. Isto explica a curiosa inversão da ordem de Ar e Água. A ordem geral é Fogo (nas estrelas), Ar (na atmosfera), Água (Em cima da Terra) e Terra (no centro do universo). A ordem dos trígonos é invertida (Fogo, Água, Ar, Terra) devido à posição dos números correspondentes no Número Nupcial. Além disto, o desenvolvimento da astrologia deveria tornar mais precisa a utilização do Número Nupcial para os propósitos de determinar os melhores e piores nascimentos.

Investigamos, então, três problemas platônicos (o Número Nupcial, o Número do Tirano e a proporção entre os Elementos Materiais), cada um apresentado por Platão de forma independente em contextos independentes. As soluções dadas também foram independentes, no sentido de que nenhuma informação tirada do contexto foi usada na resolução de um problema de outro contexto. As soluções, no entanto, são intimamente relacionadas, pois a proporção entre os Elementos Materiais é dada no Número Nupcial, que, por sua vez, se encontra na base do Número do Tirano. Tudo isto indica que há uma estrutura matemática que fundamenta a unidade do pensamento platônico. Erickson e Fossa (2006)² argumentam que essa estrutura é a da Linha Dividida, que abordaremos a seguir.

A Linha Dividida

Na analogia da Linha Dividida (*A República*, Livro VI), Platão imagina uma linha (segmento) dividida em certa razão, cujas partes também estão divididas na mesma razão. Cornford (1969) apenas explicitou a proporção que defina a Linha. Isto é, dado uma linha dividida nas seguintes quatro partes $\underline{A} \ \underline{B} \ \underline{C} \ \underline{D}$, temos $A+B:C+D = A:B = C:D$. Em seguida, explicou a hierarquia ontológica/ epistemológica que a linha simboliza. Assim, para Cornford, a Linha Dividida é apenas uma imagem conveniente e sua estrutura matemática não tem importância para o desenvolvimento da doutrina filosófica. Outros, como A. E. Taylor (1926), observaram que as duas igualdades implicam que $B=C$. Isto, por sua vez, implica que B é a média geométrica entre A e D (isto é,

2 Ver a referida obra para outros exemplos da unidade do pensamento platônico, como o “número geométrico” do universo e sua relação com o Mito de Er.

$B^2=AD$). Assim, podemos escrever a linha como $\underline{E}|\underline{g}|\underline{g}|\underline{e}$, onde E é o extremo maior, e o extremo menor e g a média geométrica.

Fossa e Erickson (2005) mostraram que, se os valores de E , g e e forem números inteiros positivos, conforme o ponto de vista pitagórico, então toda Linha Dividida tem uma das seguintes formas:

$$\underline{n^2}|\underline{nm}|\underline{nm}|\underline{m^2} \quad (\text{linhas primitivas})$$

ou

$$\underline{kn^2}|\underline{knm}|\underline{knm}|\underline{km^2} \quad (\text{linhas compostas}),$$

onde n e m são inteiros positivos, primos entre si, e k é qualquer inteiro positivo.

O Número Nupcial contém três Linhas Divididas, pois a altura para a hipotenusa de cada triângulo é a média geométrica das duas partes em que a hipotenusa é cortada (ver a Figura 1):

$$\underline{4800}|\underline{3600}|\underline{3600}|\underline{2700},$$

$$\underline{3840}|\underline{2880}|\underline{2880}|\underline{2160},$$

$$\underline{2880}|\underline{2160}|\underline{2160}|\underline{1620}.$$

Semelhantemente, o Número do Tirano é repleto de Linhas Divididas, das quais destacamos algumas na sua base (ver a Figura 2):

$$\underline{5120}|\underline{2880}|\underline{2880}|\underline{1620},$$

$$\underline{3840}|\underline{2160}|\underline{2160}|\underline{1215},$$

$$\underline{6400}|\underline{3600}|\underline{3600}|\underline{2025},$$

$$\underline{4096}|\underline{2304}|\underline{2304}|\underline{1296},$$

$$\underline{2304}|\underline{1296}|\underline{1296}|\underline{729},$$

$$\underline{3072}|\underline{1728}|\underline{1728}|\underline{972}.$$

A parte da Figura 2 sobre a última dessas Linhas foi identificada, em Erickson e Fossa (2005), como o “número geométrico” do mundo, sendo 1728 a parca que tem as duas mãos no Carretel da Necessidade, enquanto 3072 e 972 representam as outras duas parcas.

O que faz a Linha Dividida central à doutrina platônica, porém, não é apenas o fato de que aparece sempre na sua obra. Mais do que isto, há um método que produz novas Linhas Divididas de qualquer dada Linha Dividida. A regra é a seguinte: a soma dos quatro elementos de uma Linha Dividida está para a soma de qualquer um dos extremos assim como essa soma está para o extremo usado. Assim, dada a linha $\underline{E}|\underline{g}|\underline{g}|\underline{e}$, obtemos, usando a regra, as seguintes duas Linhas:

$$\begin{array}{l} \underline{E+g+g+e} | \underline{E+g} | \underline{E+g} | \underline{E}, \\ \underline{E+g+g+e} | \underline{e+g} | \underline{e+g} | \underline{e}. \end{array}$$

Começando com a Linha Dividida $\underline{1} | \underline{1} | \underline{1} | \underline{1}$, todas as Linhas Divididas primitivas são geradas pela regra. A Figura 4 mostra um segmento inicial da referida geração, disposto como uma árvore. Visto que as várias estruturas matemáticas, como o Número Nupcial e o Número do Tirano, podem ser compreendidas como sendo geradas pelas Linhas Divididas nelas contidas, vemos como a Linha Dividida é, para Platão, um princípio genético de todo o universo.

Figura 4. A Geração das Linhas Primitivas.

Neste sentido, é muito estranho que os Elementos Materiais não formam uma Linha Dividida, pois esperaríamos que algo como Fogo | Ar | Água | Terra seria gerado pela regra de geração das Linhas Divididas e, subseqüentemente, esses elementos se combinariam em diversas maneiras para formar o mundo físico. Mas, visto que $Ar=2880^12160=Água$, os Elementos Materiais não formam uma Linha Dividida e, conseqüentemente, parece que o mundo físico não seja gerado pelo princípio genético. Na próxima seção mostraremos como a Linha Dividida gera os Elementos Materiais.

A Linha Dupla, Proporções Continuadas e Aristóteles

Em Fossa e Erickson (2005), a Linha Dupla foi investigada rapidamente, quase como um exercício intelectual. Será mostrado agora, porém, que a Linha Dupla tem uma aplicação importante: a da geração dos Elementos Materiais. Também será mostrado como a Linha Dupla pode ser gerada da Linha Dividida. A Linha Dupla — ou mais apropriadamente, a Linha Dupla-

mente Dividida —, então, é simplesmente a Linha Dividida com cada uma das suas partes dividida de novo na mesma proporção. Quando primitiva, a Linha Dupla tem a seguinte forma:

$$\underline{n^3} \mid \underline{n^2m} \mid \underline{n^2m} \mid \underline{nm^2} \mid \underline{n^2m} \mid \underline{nm^2} \mid \underline{nm^2} \mid \underline{m^3},$$

onde n e m são primos entre si. Quando é composta, cada elemento é multiplicado por alguma constante k . A base do triângulo grande da Figura 2 é uma Linha Dupla primitiva:

$$\underline{4096} \mid \underline{2304} \mid \underline{2304} \mid \underline{1296} \mid \underline{2304} \mid \underline{1296} \mid \underline{1296} \mid \underline{729},$$

onde $n=16$ e $m=9$. Visto que n^2m é a média geométrica entre n^3 e nm^2 , enquanto nm^2 é a média geométrica entre n^2m e m^3 , a Linha Dupla é composta de duas Linhas Divididas. A média geométrica dos extremos, n^3 e m^3 , geralmente não é um inteiro e, em qualquer caso, não aparece na Linha Dupla.³ Os quatro números distintos que aparecem na Linha Dupla, no entanto, estão em proporção continuada:

$$n^3:n^2m::n^2m:nm^2::nm^2:m^3 (=n/m).$$

Já vimos que os números que representam os Elementos materiais estão em proporção continuada (3840:2880::2880:2160::2160:1620). Lembramos que os valores dessa proporção foram multiplicados por 60. Assim, dividindo de novo, temos a proporção 64:48::48:36::36:27. Mas, $64=4^3$, $48=4^2 \times 3$, $36=4 \times 3^2$ e $27=3^3$. Desta forma, os Elementos Materiais formam uma Linha Dupla composta,

$$\underline{3840} \mid \underline{2880} \mid \underline{2880} \mid \underline{2160} \mid \underline{2880} \mid \underline{2160} \mid \underline{2160} \mid \underline{1620},$$

onde $n=4$, $m=3$ e $k=60$.

Fossa e Erickson (2005) mostraram que a Linha Dupla obedece a uma regra de geração análoga à da Linha Dividida. A Figura 5 mostra um segmento inicial dessa geração.

³ No caso do exemplo numérico dado no texto, $n(=16)$ e $m(=9)$ são números quadrados e, portanto a média geométrica de 4096 e 729 é um inteiro (1728).

Figura 5. A Geração das Linhas Duplas.

Comparando as Figuras 4 e 5, vemos que as duas gerações têm a mesma estrutura. Vamos chamar os números n e m as *raízes* da Linha, seja ela uma Linha Dividida ou uma Linha Dupla. Se for composta, chamemos k o seu *coeficiente*. As Linhas Divididas e as Linhas Duplas, quando compostas, são determinadas pelas raízes e coeficientes. As primitivas, no entanto, são determinadas simplesmente pelas raízes. Todas as Linhas nas referidas Figuras são primitivas e as Linhas Duplas da Figura 5 têm as mesmas raízes quanto as Linhas Divididas nos lugares correspondentes da Figura 4. Isto explica a similaridade das Figuras 4 e 5. Mas também nos permite fazer uma só regra genética tanto para Linhas Divididas, quanto para Linhas Duplas. Fazemos isto em relação às raízes. A Figura 6 mostra o segmento inicial dessa regra para as Linhas das Figuras 4 e 5. Escrevemos as raízes como uma fração em que o numerador é a raiz do extremo maior e a denominador é a do extremo menor.

Figura 6. A Geração das Raízes.

Podemos expressar a regra da seguinte forma: dadas as raízes de uma Linha primitiva, a raiz do extremo maior das novas Linhas será a soma das raízes da Linha original; cada uma dessas raízes será a raiz do extremo menor das novas Linhas. A Figura 7 ilustra a regra graficamente.

Figura 7. A Regra das Raízes.

Interessantemente, se escrevemos os recíprocos dessas frações, a regra gera todas as frações reduzidas entre 0 e 1. Visto que a regra das raízes gera tanto o desabrochamento das Linhas Divididas quanto o das Linhas Duplas, essa regra explica a unidade estrutural destes dois tipos de Linhas (Figuras 4 e 5).

A regra das raízes tem um pequeno defeito no sentido em que é uma regra global, mostrando que duas árvores de geração têm uma unidade estrutural. Não mostra com nitidez, no entanto, a relação entre os nódulos das duas árvores. Para tanto, precisamos de uma regra local que gere as Linhas Duplas a partir das Linhas Divididas. Mas a Linha Dupla correspondente a uma Linha Dividida é gerada pela junção dos n -ésimo e m -ésimo múltiplos desta, onde n e m são as raízes das duas Linhas. Essa nova regra é exibida de forma esquemática na Figura 8.

Figura 8. A Geração da Linha Dupla da Linha Dividida.

Podemos interpretar estes resultados como uma visão platônica sobre o desabrochamento do ser. O processo começaria com o Hum, seguido, em

seqüência, pelos números inteiros positivos, as razões e as proporções. Médias geométricas e proporções continuadas se manifestariam, respectivamente, como Linhas Divididas e Linhas Duplas. Cada⁴ Linha Dividida primitiva gera duas outras Linhas Divididas primitivas, um número infinito de Linhas Divididas compostas e uma Linha Dupla primitiva. A última também gera um número infinito de Linhas Duplas compostas. A Figura 9 mostra essas relações, omitindo, no entanto, as Linhas compostas, exceto as que desembocam na Linha dos Elementos Materiais. Uma vez que esses são gerados e realizados como Sólidos Regulares, a geração do mundo é efetuada através das várias combinações desses Elementos.

Figura 9. A Geração das Linhas.

4 Exceto a primeira que só gera uma, em vez de duas, outra Linha primitiva.

Com este resultado, alcançamos o objetivo do presente trabalho: mostrar que a doutrina dos Elementos Materiais se enquadra na da Linha Dividida. Podemos, entretanto, fazer mais algumas observações. A primeira é que, na medida em que as Linhas Duplas são associadas com as coisas do mundo, o movimento do desabrochamento do ser é sempre no sentido de uma unidade mais fraca. As médias geométricas proporcionam às suas partes constituintes uma unidade muito forte, enquanto a unidade das proporções continuadas é claramente mais fraca. Assim, em termos da hierarquização do Mito da Caverna (e a Analogia da Linha Dividida) o movimento que vai das Idéias Transcendentais, através da Matemática e da Ciência, para as Sombras leva a níveis sempre mais tênues de unidade. Em relação ao desabrochamento do ser, a Figura 9 é consoante com a interpretação de Platão na tradição neoplatônica, para a qual ver Fossa (2006) e Erickson e Fossa (2006).

Finalmente, observamos que Erickson e Fossa (2006) investigaram a doutrina aristotélica em termos da sua análise de oposições duplas, como as das quatro causas e os conceitos de *Kínesis* e *Dúnamis* (ver a Figura 10). A investigação concluiu que Aristóteles colocou a estrutura da dupla oposição, oriunda da proporção continuada, no lugar da estrutura da Linha Dividida, como o princípio matemático básico do seu sistema filosófico. Agora, porém, parece que Aristóteles, como cientista (no sentido de Erickson e Fossa, 2006), estava usando o instrumento apropriado para a análise empreendida. Isto é, Aristóteles não colocou a oposição dupla em oposição à Linha Dividida, mas apenas desenvolveu uma parte da doutrina platônica referente a uma fatia do desabrochamento do ser —a que trata de substância no mundo. Isto seria consoante com o uso que o próprio Platão fez da proporção continuada na sua abordagem dos Elementos Materiais.

Figura 10. A Dupla Oposição em Aristóteles.

Conclusão: A Perspicácia Pitagórica

Na interpretação apresentada aqui, Platão se inspirava na tradição pitagórica e, portanto, será apropriado concluir o presente trabalho com algumas reflexões sobre o papel da matemática nessa tradição. Walter Burkert (1972) retratou o pitagorismo como uma religião em que a importância da matemática é minimizada. Infelizmente, essa obra teve uma grande influência na interpretação de Pitágoras. Embora há, de fato, aspectos religiosos muito importantes para os pitagóricos, o mais importante sendo a transmigração da alma, a evidência dos antigos indica que a matemática foi fundamental. Até as histórias sobre a vida de Pitágoras nos dizem que ele passou muito tempo no Egito, aprendendo a sabedoria desse país. A significância das referidas histórias, sejam elas literalmente verdadeiras ou não, é que a matemática foi central ao pensamento de Pitágoras, pois o grande saber do Egito, na opinião dos gregos antigos, foi a matemática.

Outras interpretações, como a de Whitehead *apud* Kahn (2001, p. 172), se fixam na importância da matemática e fazem de Pitágoras um precursor da ciência moderna. Isto é claramente uma falsa modernização da doutrina pitagórica.

Precisamos ver Pitágoras como um homem em que as duas doutrinas — a de que a matemática revela o *lógos* do mundo e a da transmigração da alma — coexistem harmonicamente. Mesmo assim, parece que há uma prioridade. No tempo de Pitágoras, houve várias teorias sobre o mundo e sobre o homem, incluindo uma versão órfica sobre a transmigração. Nesse contexto, Pitágoras é creditado com um “novo início” na filosofia; mas, o novo início não parece ser a adoção de uma tese já corrente — a da referida transmigração. Antes, sua inovação parece ser a validação dessa tese pela matemática. Desta forma, parece que Pitágoras aceitou a transmigração porque foi revelada como verdadeira pela matemática. Para um exemplo da referida revelação, ver Fossa (2006). Com o desenvolvimento de teorias matemáticas mais sofisticadas, os pitagóricos começaram a avançar outras diversas teorias sobre questões divinas e, referente a essas teorias, a “escola” pitagórica se fragmentou. O que se mantinha constante, porém, foi a validação da filosofia pela matemática e, portanto, é isto que aceitamos como sendo característico de Pitágoras e dos vários pensadores pitagóricos.

Falta somente compreender em que maneira os pitagóricos concebiam a matemática como o *lógos* do mundo. Claramente, não pensaram que a filosofia é uma consequência lógica da matemática. Também não usaram a mate-

mática para modelar uma situação física, como a ciência moderna faz. Muito pelo contrário, discerniram, na própria matemática, estruturas que simplesmente imputaram ao mundo físico. Quais estruturas seriam adotadas para esse papel? Isto não era, para os antigos, uma questão que poderia ser resolvida pela experimentação. Era uma questão da beleza da estrutura, da riqueza das suas possíveis ramificações — o que permitiria a tessitura de uma poderosa teoria com vários contatos com o mundo físico e, provavelmente mais importante, muitos contatos internos de natureza auto-referencial — e da existência de propriedades notáveis que poderiam engendrar sentimentos de pasmo, admiração e mistério — sentimentos apropriados à apropriação do conhecimento divino. Em última análise, era uma questão de *insight* ou perspicácia, não de metodologia científica.⁵

Referências Bibliográficas

Burkert, Walter. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Trad. E. L. Minar, Jr. Cambridge (MA): Harvard UP, 1972.

Cornford, F. M. *The Republic of Plato*. London: Oxford UP, 1969.

_____. *Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato*. London: Routledge & Kegan Paul, 1977.

Erickson, Glenn W. e John A. Fossa. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumarã, 2006.

_____. *Número e Razão: Os Fundamentos Matemáticos da Metafísica Platônica*. Natal: Editora da UFRN, 2005.

_____. *A Pirâmide Platônica*. João Pessoa: Editora da UFPb, 1996.

Fossa, John A. "On the Pentagon as a Pythagorean Emblem". *Revista Brasileira de História da Matemática* v. 6, n. 12, 2006.

5 Agradeço ao Prof. Glenn W. Erickson (UFRN), Prof. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (PUC-Rio) e a Profa. Maura Iglésias (PUC-Rio) por conversas estimulantes sobre o tema do presente trabalho. Também agradeço à colega Giselle Costa de Sousa pela ajuda com a correção do português.

Fossa, John A. e Glenn W. Erickson. "The Divided Line and the Golden Mean". *Revista Brasileira de História da Matemática* v. 5, n. 9, 2005.

_____. "Sobre a Proporção entre os Elementos Materiais no Timeu". In John A. Fossa (Org.). *Facetas do Diamante: Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática*. Rio Claro: SBHMat., 2000.

_____. "O Número Nupcial no Livro VIII da República". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 3, 1994.

_____. "Os Sólidos Regulares e a Ciência na Antigüidade". *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 2, 1990.

Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1956.

Kahn, C. H. *Pythagoras and the Pythagoreans: A Brief History*. Indianapolis: Hackett, 2001.

Taylor, A. E. *Plato, the Man and his Work*. London: Methuen, 1926.