Abel Lassalle Casanave [2]

Negação como Processo Formal[1]

Resumo

Neste artigo apresentamos a distinção hilbertiana entre diferença, negação finitária e negação como processo formal. Mostramos que este tratamento da negação forma parte da história do modo algébrico de pensar e do conhecimento simbólico.

Palavras-chave: Negação . Formalismo . Finitismo . Programa de Hilbert . Conhecimento simbólico

Abstract

In this paper we discuss Hilbert's distinction between difference, finitary negation, and negation as a formal process. We show that this treatment of negation is part of the history of the algebraic mode of thought and of symbolic knowledge.

Key-words: Negation . Formalism . Finitism . Hilbert's Program . Symbolic knowledge

Se há de se procurar *kantismo* na fundamentação hilbertiana da matemática, haver-se-á de encontrá-lo na tese de que a identidade e a diferença dos objetos é um *affaire* da sensibilidade e não do entendimento.[3] Essa minha afirmação é claramente conseqüente com os pressupostos epistemológicos

1 Este texto foi beneficiado pelas observações do Prof. Frank Sautter.

2 Professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Maria. Pesquisador do CNPq. E-mail: abel.lassalle@terra.com.br

3 Para um excelente *survey* sobre o formalismo hilbertiano, em particular sobre a presença de temas kantianos no Programa de Hilbert, veja-se Mancosu (1998), pp. 149-188. Reduzi ao mínimo as referências bibliográficas, porém o leitor pode também consultar com proveito Mancosu (1998) para uma lista bibliográfica expressiva. Neste texto parcialmente resumo, corrijo e amplio trabalhos anteriores citados nas referências bibliográficas.

que caracterizam aquilo que Hilbert chamou "ponto de vista finito": a) que os objetos sejam dados em sua identidade e diferença; b) que em relação com as propriedades e/ou relações se possa determinar se os objetos em questão as possuem ou não. Esta tese de caráter extremamente geral encontra uma peculiar aplicação no caso da aritmética: a) os objetos dela são os *signos numéricos* /,//,///,... ; b) se pode por simples inspeção determinar se entre tais seqüências de barras vigem operações, relações e propriedades do tipo "justapor", "ser parte de", etc.[4]

Além dos signos numéricos /, //, ///,... que são seu objeto, a aritmética inclui signos que servem para a comunicação: a) os que significam seqüências de barras: 1, 2, 3, ... ; b) os signos "=" e "≠" para a identidade e a diferença;[5] c) outros signos que designam operações, propriedades e relações decidíveis entre seqüências de barras: +, ×, <, etc. Com a ajuda desses signos formulamos enunciados que se adequam ao ponto de vista finito e que chamaremos enunciados finitários ou também "com conteúdo". Assim, por exemplo, são enunciados aritméticos finitários "$2 = 2$"; "$2 \neq 3$"; "$2 + 3 = 5$"; "$3<2$". Considerando as seqüências de barras que os signos 1, 2 , 3,... significam, os dois primeiros enunciados expressam a identidade e a diferença, respectivamente, entre as correspondentes seqüências de barras; o terceiro que a justaposição das seqüências que correspondem a 2 e 3 é idêntica com a que corresponde a 5; o quarto que a seqüência que corresponde a 3 é parte da seqüência que corresponde a 2. Naturalmente, os três primeiros enunciados são verdadeiros enquanto que o último é falso.[6]

A aritmética limitada às restrições que impõe o ponto de vista finito não é a aritmética que poderíamos denominar *usual*, isto é, aquela que os matemáticos desenvolvem "informalmente". Como veremos a seguir, a distinção entre ambas aritméticas passa por examinar se e sob que condições a aplicação das operações lógicas preserva sentido finitário com especial referência à negação. A aplicação do operador lógico de negação a equações e inequações numéricas preserva sentido finitário em cujo caso inverte os valores de verdade em

4 Devo confessar que não vejo empirismo nenhum no formalismo hilbertiano; para o leitor interessado em vê-lo, cf. Giaquinto (1983), Detlefsen (1986) e Detlefsen (1990).

5 À bipolaridade da identidade e da diferença deve-se acrescentar a bipolaridade da verdade e da falsidade, isto é, que o falso não é a negação do verdadeiro.

6 Para uma fina exposição de aspectos conceituais do ponto de vista finito, veja-se Sinaceur (1993). Para diferentes alternativas de caracterização matemática de tal ponto de vista, cf. Kreisel (1983), Tait (1981).

questão: quando negados, os três primeiros enunciados são falsos e o último é verdadeiro.[7] Considerações similares podem ser feitas *mutatis mutandis* acerca dos restantes operadores lógicos proposicionais: a conjunção, a disjunção ou a condicionalização.

Ora, mesmo na aritmética finitária necessitamos enunciados que comuniquem generalidade, isto é, necessitamos de variáveis de individuo *que variam sobre o domínio previamente dado dos signos numéricos*.[8] Enunciados que envolvem variáveis livres como "a + 1 = 1 + a" possuem sentido finitário desde que concebidos da seguinte maneira: se *a* é um signo numérico *dado* então a + 1 = 1 + a. O problema aparece com a negação deles, pois, segundo Hilbert, neste caso dever-se-ia percorrer o domínio de signos numéricos, ou seja, a negação envolveria uma referência a totalidades infinitas, isto é, uma passagem ao transfinito:

> *Assim, por exemplo, o enunciado se* **a** *é um signo numérico deve valer sempre:*
>
> $$a + 1 = 1 + a,$$
>
> *do ponto de vista finito* não é passível de negação. *Isto fica claro quando consideramos que este enunciado não deve ser interpretado como uma conexão infinita de muitas equações numéricas por meio de "e", mas como um juízo hipotético que afirma algo, caso seja exibido um signo numérico.* (Hilbert (1926), p. 173)

Portanto, a negação não preserva em geral sentido finitário e, de maneira análoga, também não o preservam nem a quantificação universal nem a quantificação existencial irrestritas. Um exemplo paradigmático de enunciado transfinito é o princípio de terceiro excluído, para cuja formulação concorrem combinadas as operações lógicas de negação e de quantificação irrestrita: $(\forall x)\ (P(x)\ \vee \neg\ P(x))$ ou $(\forall x)\ P(x) \vee (\exists x)\ \neg P(x)$. A título de exemplo do uso

7 Em uma versão radical, a negação finitária se identifica com a diferença: "Do ponto de vista finito, a negação de uma proposição não tem sentido se não equivale a uma proposição afirmativa. Assim, por exemplo, a proposição negativa: o signo numérico *a* não é idêntico ao signo *b*, significa o mesmo que a proposição afirmativa: o signo numérico *a* é diferente do signo *b*." (Bernays (1941), p. 146.)

8 No parágrafo anterior ao texto citado na nota de rodapé acima, Bernays escreve: "Vemos ao mesmo tempo que existe uma diferença essencial entre os pontos de vista intuicionista e finista. Em particular, remarcaremos a seguinte diferença concernente às proposições gerais: enquanto que o intuicionismo limita-se a contestar a aplicação de terceiro excluído a tais proposições, o método finitista evita por princípio a negação de toda proposição geral, assim como seu emprego como antecedente em uma proposição hipotética." (Bernays (1941), p. 141.) Para uma discussão acerca do estatuto da generalidade, cf. Smorynski (1989).

questionável deste princípio — cujo interesse é meramente teórico no caso da aritmética, porém nada teórico no caso de ramos mais avançados da matemática — considere-se uma demonstração na qual da suposição de $(\forall x)\ P(x)$ se segue um enunciado falso. Logo, $\neg(\forall x)\ P(x)$, e assim, *tertium non datur*, $(\exists x)\ \neg P(x)$, isto é, ter-se-ia demonstrado a existência de um objeto *sem exibi-lo*. Na aritmética finitária não são admissíveis tais princípios transfinitos de demonstração.

Qual é o problema? Por um lado, o problema reside em que o transfinito era visto como potencial fonte de paradoxos, como os que afetaram a teoria de Cantor. Por outro lado, decididamente mais importante para Hilbert, o sentido dos enunciados transfinitos deve ser adequadamente esclarecido com vistas a sua utilização nas demonstrações matemáticas em geral e das demonstrações aritméticas em particular.[9] Desde *Os fundamentos da geometria*, Hilbert exprimia sua concepção de matemática (e do progresso da matemática) em termos da relação entre os problemas dados e os meios para resolvê-los, i.e., os princípios e métodos de demonstração. A sua "regra fundamental" é que, dado um problema geométrico, ele pode ser respondido através de meios limitados. Em relação com a "pureza" dos métodos que alguns matemáticos exigem, Hilbert declarava que essa exigência era uma *forma subjetiva* da sua regra fundamental. Quase trinta anos depois, a respeito da rejeição construtiva de princípios e métodos transfinitos Hilbert escrevia: "Se há uma totalidade de observações e fenômenos que merece ser objeto de uma investigação séria e profunda é esta –pois, depois de tudo, é parte da tarefa da ciência libertar-nos da arbitrariedade, do sentimento e dos preconceitos, e *livrar-nos do subjetivismo* que se sente nos pontos de vista de Kronecker e, segundo me parece, encontra sua culminação no intuicionismo." (Hilbert (1930), p. 306; grifos nossos)

Hilbert aceita que tais princípios não são confiáveis, porém não aceita que a rejeição deles possa ser justificada por critérios subjetivos; em particular, pelo recurso à intuição construtivista. Não se trata para Hilbert de negar, por certo, a existência de um conhecimento confiável (=intuitivo): a percepção (ou talvez melhor: as pré-condições de conhecimento que a sensibilidade fornece) é concebida por Hilbert como a instância intuitiva intersubjetiva que permite não somente discriminar entre princípios confiáveis e não-confiáveis, mas também que serve como base para a definitiva admissão dos últimos.[10]

9 Hilbert sempre acreditou que os paradoxos se deviam à simples falta de precaução no uso dos conceitos da teoria de conjuntos. Que o problema para Hilbert sempre foi o da justificação de princípios e de métodos transfinitos pode ser visto em Abrusci (1980).

10 É importante notar que esses princípios não-confiáveis são considerados *sem conteúdo do ponto de vista finito*, não simplesmente sem conteúdo. (O formalismo de Hilbert é metodológico!) Com

No caso da aritmética, a solução formalista do impasse entre métodos cuja confiabilidade (i.e., "pureza") é garantida e métodos cuja confiabilidade é questionada consiste, *em primeiro lugar*, em discriminar entre uma classe de conhecimento *intuitivo*, porém *intersubjetivo*, fundado na percepção de seqüências de barras, próprio da aritmética finitária, e um conhecimento *simbólico*, alcançado por manipulação de signos, codificado na teoria aritmética formal. *Em segundo lugar*, pela demonstração de consistência dessa teoria formal.

Em geral, por um procedimento que podemos denominar de formalização completa da matemática, qualquer teoria matemática usual, aritmética incluída, é codificada na teoria formal correspondente, que por vezes Hilbert chama de teorias matemáticas em sentido próprio. Este é "o pensamento fundamental" do Programa, a saber, que a matemática usual pode ser completamente formalizada, de maneira tal que ela pode ser vista como um estoque de fórmulas desprovidas de sentido. Uma teoria formal pressupõe uma linguagem caracterizada de forma tal que se possa decidir se uma seqüência de signos é uma fórmula bem formada da linguagem ou não. Além dos signos usuais da matemática, tal linguagem inclui os signos para as operações lógicas. Dentre essas fórmulas, algumas são chamadas axiomas. Uma demonstração é uma seqüência de fórmulas cada uma das quais ou bem é um axioma ou bem é resultado da aplicação de alguma regra de inferência a fórmulas anteriores da seqüência. Uma fórmula será demonstrável, portanto, um teorema, se é a última fórmula de uma seqüência de tal tipo.[11]

Observe-se que a lógica é tratada *conjuntamente* com a matemática, isto é, Hilbert não pensa em termos de uma lógica subjacente. Isto reflete o fato de que as operações e princípios lógicos são problemáticos quando vinculados com a mencionada referência a totalidades infinitas, portanto, quando vinculados com a matemática. Neste contexto transfinito, a negação, assim como as restantes operações lógicas, é concebida como um *processo formal*. Em *A fundamentação da teoria elementar de números,* Hilbert escreve:

> *É justamente uma das tarefas mais importantes da teoria da demonstração esclarecer o sentido e admissibilidade da negação: a*

efeito, haverá princípios menos confiáveis que os Axiomas de Redutibilidade e Infinito de Russell? No entanto, em relação com alternativas para a admissão de princípios e métodos de demonstração, Hilbert escreve: "E para uma justificação eu não necessito nem Deus, como Kronecker, nem assumir uma faculdade especial de nosso entendimento dirigida ao princípio de indução, como Poincaré, nem alguma *Ur-Iintuition* como Brouwer, nem, como Whitehead e Russell, os axiomas de Infinito e Redutibilidade, que são *pressuposições reais*, *com conteúdo*, não compensadas por demonstração de consistência, e que inclusive a última delas não é sequer plausível. (Hilbert (1931), p. 493; grifos nossos)

11 Cf. Hilbert (1931), p. 489.

> *negação é um processo formal, por meio do qual, de um enunciado S resulta outro que está vinculado com S pelos axiomas da negação mencionados acima (essencialmente, o* principium contradictionis *e o* tertium non datur*). O processo de negação é um meio necessário da pesquisa teórica; sua aplicação incondicional possibilita a completude e fechamento da Lógica. Porém, em geral, o enunciado que resulta da negação é um enunciado ideal, e considerar esse enunciado ideal como sendo em si mesmo um enunciado real seria compreender erroneamente a natureza e essência do pensamento.* (Hilbert (1931), pp. 493-494.)

Há, portanto, além da diferença e da negação finitária, a negação entendida como processo formal ou, simplesmente, a negação formal. A passagem também serve para esclarecer a natureza dos enunciados transfinitos. Com efeito, os enunciados transfinitos que a teoria formal codifica são concebidos como enunciados *ideais* face os enunciados finitários ou *reais* da aritmética intuitivo-finitária. Por sua vez, esse conceito de enunciado ideal se relaciona com o conceito de elemento ideal: o acréscimo axiomático do operador $\boldsymbol{\tau}$, por exemplo, que permite demonstrar o principio de terceiro excluído, postularia a existência de elementos (representantes) ideais para qualquer propriedade não vazia.

O sentido do uso irrestrito dos operadores lógicos e *a fortiori* dos enunciados ideais que resultam de sua aplicação decorre da manipulação regrada dos símbolos correspondentes. Uma observação aqui é pertinente, a saber, a algebrização da matemática envolvida no conceito de teoria formal. Já vimos que a negação apresentava problemas quando combinada com a generalidade. Ora, na teoria formal as variáveis são concebidas como *na álgebra*, isto é, como signos sujeitos a manipulação regrada. Portanto, já não estamos em presença de variáveis que supõem um domínio de objetos previamente dado. Pode-se dizer que Hilbert estende esta algebrização às operações lógicas: quando desprovidas de sentido finitário, elas são concebidas como signos de um cálculo algébrico:

> *Com efeito, reconhecemos que a matemática elementar já vai além do ponto de vista finito na teoria intuitiva de números. Mesmo o método de cálculo algébrico com letras não está incluído nos recursos da teoria de números intuitiva e com conteúdo como concebida até aqui. Nessa teoria usam-se sempre fórmulas somente para*

> *comunicação; as letras significam numerais, e por intermédio de uma identidade a concordância de dois signos é comunicada. Na álgebra, por outro lado, consideramos as expressões em si mesmas formadas por letras como objetos independentes, e as proposições com conteúdo da teoria de números são formalizadas por meio delas.* (Hilbert (1926), p. 174-175.)

Como já dissemos, em segundo lugar, a solução do impasse acerca da admissibilidade de princípios e métodos exigia demonstrar que a teoria formal em questão é consistente, isto é, que não deduz "0 = 1". Os métodos a ser utilizados nesta demonstração, naturalmente, não podem incluir princípios transfinitos sob pena de circularidade. Assim, o problema da demonstração de consistência de teorias formais gera uma nova teoria matemática, a saber, a teoria da demonstração ou meta-matemática. A teoria da demonstração não pode ser uma teoria formal: ela é uma teoria intuitiva cujos conceitos e métodos devem ser finitários. Com efeito:

> *Esta matemática em sentido próprio, a matemática formalizada, é acompanhada por uma nova matemática, uma meta-matemática, que é necessária para assegurar a matemática formalizada; nela –em contraste aos modos puramente formais de inferência da matemática em sentido próprio– é usada inferência com conteúdo, porém somente para demonstrar a consistência dos axiomas.* (Hilbert (1931), p. 489)

Na teoria da demonstração se deve demonstrar enunciados que utilizam a negação e variáveis livres, como o próprio enunciado de consistência, a saber, que para *qualquer* demonstração, "0 = 1" *não* é fórmula final. Porém, o domínio das variáveis é previamente dado sob condições finitárias: seqüências de signos da linguagem da teoria formal com as condições de identidade e diferença do caso; propriedades e relações (como "ser uma demonstração") que podemos decidir por inspeção se seqüências de tais signos as possuem ou não. (Observe-se que isto vale para qualquer teoria formal de qualquer ramo da matemática.) Em particular, com respeito à negação na teoria da demonstração, Hilbert escreve: "Usamos com conteúdo a negação somente na demonstração de consistência e na medida e enquanto corresponde ao nosso ponto de vista fundamental." (Hilbert (1922), p 173) O círculo intuição-formalismo-intuição está fechado: os princípios e métodos transfinitos fundamentar-se-ão no âmbito do finito. Escreve Hilbert: "Sobre o solo do finito deve ser alcançado o manejo livre e o domínio completo sobre o transfinito!" (Hilbert (1923), p. 156)

Porém, que classe de conhecimento é aquele alcançado através de manipulação simbólica? Historicamente temos várias alternativas para responder que tipo de conhecimento é aquele que Leibniz denominou simbólico. Uma primeira alternativa consiste em considerar que o conhecimento simbólico é um *sucedâneo* do conhecimento intuitivo. Assim, o uso de símbolos exigiria uma contrapartida intuitiva e a manipulação seria uma questão de economia. Poderíamos pensar que a inevitável manipulação simbólica própria da aritmética finitária é desta classe. Porém, já vimos que este não é o caso na aritmética usual ou na teoria formal correspondente que a representa.

Uma segunda alternativa seria considerar que em relação com a classe de enunciados finitários, o conhecimento simbólico *estende instrumentalmente* o conhecimento intuitivo no seguinte sentido: seja A uma fórmula finitária ou real, se a teoria formal deduz A, então a teoria intuitiva também deduz A. A demonstração deste enunciado adicionalmente proveria uma demonstração de consistência, pois como a teoria intuitiva não deduz "0 = 1", então a teoria formal também não deduz "0 = 1". Hilbert parece ter pensado algo semelhante, inclusive como estratégia para a demonstração de consistência, [12] porém o Teorema de Gödel bane essa possibilidade.

Ora, independentemente dos resultados negativos que decorrem desse celebrado teorema, a alternativa acima não daria conta do conhecimento alcançado quando se demonstram enunciados que não pertencem à classe dos finitários. Uma terceira alternativa é a seguinte: o conhecimento simbólico é conhecimento de estruturas, conhecimento de formas ou de relações, isto é, é conhecimento formal. O Teorema de Gödel não afeta esta concepção de conhecimento matemático; afeta sim a pretensão de sua fundamentação última finitária.

As três alternativas que mencionamos se encontram em Leibniz: a primeira em relação com o aparato simbólico da aritmética elementar ou com o da álgebra vista como método para a solução de problemas aritméticos ou geométricos; a segunda com a álgebra ou a análise considerando as raízes imaginárias ou os infinitésimos como elementos ideais elimináveis; a última delas vinculada essencialmente com uma concepção abstrata de álgebra, isto é, como ciência de relações quantitativas. Portanto, se há de se procurar *leib-*

12 Neste caso seria absolutamente imprescindível codificar a aritmética finitária numa "teoria formal"; porém, o objetivo da formalização não seria demonstrar sua consistência.

nicianismo na fundamentação hilbertiana da matemática, haver-se-á de encontrá-lo na noção de conhecimento simbólico.

Referências Bibliográficas

Abrusci, V. M. (1980). " ' Proof' ', ' Theory ' and ' Foundations ' in Hibert's Mathematical Work from 1885 to 1900". In Maria Luisa Dalla Chiara (ed), Italian Studies in the Philosophy of Science, Reidel P. Co., 453-491.

Bernays, P. (1941). "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration". In F. Gonseth (ed): *Les entretiens de Zurich sur les fondaments et la méthode des sciences mathématiques*, Editeurs S.A. Leemann frères & Cie.: Zurich, pp. 144-161.

Detlefsen, M. (1986). *Hilbert's Program. An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht: Reidel.

________. "On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel's first incompleteness theorem", *Journal of Philosophical Logic*, 19: 343-377.

Ewald, W. (1999). *From Kant to Hilbert. Readings in the Foundations of Mathematics*. , Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1922). Neuebegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, *Abh. Math. Sem. Hamb*. 1: 157-177. Reimpressão Hilbert (1935), pp. 157-77. (Tradução Inglesa: Ewald (1999), pp. 1115-34.)

________. (1923). Die logische Grundlagen der Mathematik. *Mathematische Annalen*, 68: 151-165. (Tradução Inglesa: Ewald (1999), pp. 1134-48.))

________. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95: 161-190. (Tradução Inglesa: van Heijenoort (1967), pp. 367-92.)

________. (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. *Mathematische Annalen*, 104: 485-494. (Tradução Inglesa: Ewald (1999), pp. 1148-57.)

________. (1930). Die Grundlagen der Mathematik. In D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, IX Anhang, Leipzig und Berlin: B.G. Teubner, pp. 289-312. (Tradução Inglesa: van Heijenoort (1967), pp. 464-79.)

________. (1935). *Gesammelte Abhandlungen*. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Berlin: Springer.

Kreisel, G. (1983) Hilbert's Programme. In P. Bennacerraf e H. Putnam (orgs): *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press: Cambridge (Mass), pp. 207-38.

Lassalle Casanave, A. (1996). Formalismo metodológico. *Papeles Uruguayos de Filosofía*, Montevideo/Uruguay, 1 (1): 5-8.

________. (1997). Hilbert y el empirismo lógico. *Revista de Filosofia*, Buenos Aires/ Argentina, XII (1/2): 29-45.

________. (1998). Em torno da interpretação operacionalista do Programa de Hilbert. *Manuscrito*, Campinas, v. XXI (1): 85-106.

________. (2000). Finitismo y conocimiento simbólico. *Cuadernos Del Sur*, Bahía Blanca /Argentina, 30: 173-180.

________. (2002). El formalismo hilbertiano. In: Lorenzano, Pablo; Molina, Fernando Tula. (Org.). *Filosofia e historia de la Ciencia en el Cono Sur*. Bernal (Argentina), 2002, v. 1, p. 193-200.

Lassalle Casanave, A. & Reis, Róbson (2005). *The Strange Case of Dr. Hilbert and Mr. Heidegger*. Proceedings of II OPO Meeting.

Mancosu, P. (1998). *From Brower to Hilbert*. New York-Oxford: Oxford University Press.

Smorynski, C. (1989). "Hilbert's programme", *CWI (Centrum voor Wiskunde en Informatica) Quarterly*, 1: 3-59.

Sinaceur, H. (1993). "Du formalisme à la constructivité: le finitisme", *Revue Internationale de Philosophie*, 186(4): 251-284.

Van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.