Jorge Alberto Molina[1]

Negación y Doble Negación en el Intuicionismo de Brouwer

Resumo

Neste trabalho são apresentadas as concepções de Brouwer sobre a negação relacionando-as com as duas ações básicas do intuicionismo matemático: a separação entre as construções matemáticas e a sua comunicação na linguagem, e a introdução das seqüências de escolha livres para além das seqüências com caráter de regra. Mostra-se aqui que, mesmo que Brouwer nunca isolasse como tema de investigação a negação enquanto constante lógica individual, concebida de forma veritativo funcional, ele a tratou na sua relação com a incompatibilidade entre duas construções matemáticas, e com o absurdo matemático.

Palavras chaves: Lógica . Lógicas divergentes . Intuicionismo . Negação intuicionista

Abstract

In this paper we discuss Brouwer's conception of negation relating it to the two basic acts of mathematical intuitionism: the separation of mathematical constructions from the linguistic communication of them, and the consideration of free-choice sequences in addition to law-like sequences. We show that although Brouwer never isolated negation as an individual logical constant, explained truth-functionally, he related it to the incompatibility between two mathematical constructions, and to mathematical absurdity.

Key-words: Logic . Non classical logics . Intuitionism . Intuitionistic negation

1 Professor do Departamento de Ciências Humanas da Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC) e professor do Departamento de Filosofia da Universidade do Estado de Rio Grande do Sul (UERGS). E.mails:molina@unisc.br; jorge-molina@uergs.edu.br

I. Algunas consideraciones sobre la negación

Si queremos entender las reflexiones de Brouwer sobre la negación, fuera de todo anacronismo, tenemos que ampliar nuestras concepciones sobre ella. Estamos acostumbrados a pensar que la negación es una operación que realizada sobre una proposición verdadera la convierte en una falsa, y sobre una proposición falsa, la convierte en una verdadera[2]. Otra forma de pensar la negación es como un conectivo proposicional monádico caracterizado por reglas de introducción y de eliminación. Así Gentzen propuso para la negación, como regla de introducción, la siguiente

$$\frac{\begin{array}{c}(A)\\ \vdots \\ \Lambda\end{array}}{\neg A}$$

y como regla de eliminación

$$\frac{A \qquad \neg A}{\Lambda}$$

Aquí vemos que la negación se aplica a proposiciones pues es ésa la interpretación que se pretende para los símbolos A, B, etc. Esas reglas fueron propuestas por Gentzen para caracterizar toda deducción válida, en el sentido de que toda inferencia correcta debería descomponerse en inferencias "atómicas" que consistirían en la aplicación de una de las reglas de introducción o de eliminación. Como la inferencia válida es aquella que es caracterizada como la que lleva de premisas verdaderas a conclusiones verdaderas, somos obligados así, de un modo implícito, al hablar de la negación, también a hablar de

2 Esta es la concepción de Frege. Ver Die Verneinung: eine logische Untersuchung. In: G.Frege *Logische Untersuchungen*. Göttingen: Vandenhoeck e Ruprecht 2 edição 1976. p. 67

la verdad y la falsedad. Verdad y falsedad permiten separar las proposiciones de otros sintagmas, como las palabras. Eso ya había sido observado por Aristóteles en *De Interpretatione* 17 a.

Clásicamente la falsedad se define como la negación de la verdad. La proposición falsa es aquella que no es verdadera. Parecería entonces que podemos afirmar que:

a) La negación es algo que sucede a las proposiciones, en el sentido de que las proposiciones son las únicas expresiones lingüísticas que pueden ser negadas

b) Cuando hablamos sobre la negación, hablamos, aunque sea de forma implícita, sobre la verdad y la falsedad. Diríamos que no podemos tener una caracterización puramente sintáctica de la negación.

c) Sin embargo, para hablar de falsedad tenemos que también hablar de la negación (pues la falsedad es la negación de la verdad).

Vemos así que estaríamos condenados a ir en círculo según lo que hemos dicho en a),b) y c). Ahora bien, la tradición que ha dado origen a la lógica clásica no es tan monolítica como podemos pensarlo, pues podemos encontrar en ella, interpretaciones de la negación que no se encuadran completamente en las notas a),b) e c) citadas arriba, interpretaciones que volveremos a encontrar de alguna forma en el intuicionismo de Brouwer. No se trata aquí de postular ni de rastrear influencias de los tratadistas de Lógica que lo precedieron sobre Brouwer, influencias que de hecho explícitamente no parecen haber existido. Si podemos hablar de influencias filosóficas sobre Brouwer sólo reconoceríamos la del cartesianismo, trasmitida por los matemáticos intuicionistas franceses Borel y Poincaré, y la de Schopenhauer con su concepción de la voluntad. Sólo queremos decir aquí que podemos reconocer en la Historia de la Lógica formas de concebir la negación, diferentes de las que hoy son más usuales, y que algunas de esas formas de pensar las podemos rencontrar en Brouwer.

Hay toda una tradición lógico-filosófica que se refiere a predicados negativos, esto es, a la posibilidad de que la negación se aplique sobre predicados. Esto no nos debería sorprender pues algunas lenguas naturales distinguen entre negación proposicional y negación predicativa. En español esa distinción no está tan marcada, al ser usada la misma expresión *no* para ambas pero en lenguas como el alemán sí. Por ejemplo al decir *Sócrates ist nicht ein philosoph* la negación recae sobre toda la proposición *Sócrates ist ein philosoph,* pero al decir *Sócrates ist kein philosoph* la negación recae sobre el predicado *philosoph*. Así tendríamos dos términos *nicht* y *kein,* uno para la negación proposicional y otro para la negación sobre predicados.

Otro hecho que es digno de notar, es que muchos filósofos concibieron la negación a partir de la oposición, ya sea oposición de términos, o de realidades. El propio Aristóteles en *Categorías 11 b 20* presenta la negación como un tipo especial de oposición. En ese texto distingue Aristóteles cuatro tipos de oposiciones, la de los relativos, la de los contrarios, la de la privación a la posesión y la de la afirmación a la negación. La oposición de los relativos es la de lo doble a la mitad, la de los contrarios como la del mal al bien, la de la privación a la posesión, como la de la visión a la ceguera y la de la afirmación a la negación como la de *Está sentado* a *No está sentado*. También afirma Aristóteles en esa obra:

> *…lo que queda bajo la afirmación y la negación no es afirmación ni negación; pues la afirmación es un enunciado afirmativo y la negación es un enunciado negativo, mientras que nada de lo que queda bajo la afirmación y la negación es un enunciado. Con todo, se dice también que estas cosas se oponen recíprocamente como una afirmación y una negación; pues también en éstas el tipo de oposición es el mismo: en efecto, así como a veces la afirmación se opone respecto a la negación, vg :está sentado-no está sentado, así también se opone el hecho que hay bajo cada una de ellas, a saber el estar sentado-no estar sentado.* (Categorías 12 b 5-10)

Lo que cae bajo la negación es una cosa. Vemos así aquí la puerta abierta para hablar de la negación a partir de la oposición de cosas, que pueden ser tanto entidades extra lingüísticas como *lógoi. Lógos* puede significar tanto una palabra, como también la definición de una cosa, una discusión, una conversación, un discurso, una proposición, como también una relación o proporción. La proposición es el *lógos apophantikós* que cuando es negativa se llama *apóphasis*, y cuando es negativa *katáphasis*

Leemos también en Aristóteles:

> *una afirmación es la declaración que una cosa se relaciona a otra cosa.......una negación es la declaración de que una cosa está separada de otra cosa.* (De Interpretiones 17 a 25)

Así, según Aristóteles la negación expresa una separación entre cosas. Si nuestra interpretación no está errada, podemos decir que ya en la tradición filosófica reconocemos una caracterización de la negación como una relación de oposición no apenas entre proposiciones, mas también entre conceptos y entre entidades extra lingüísticas.

II. La negación y la primera acción del intuicionismo

La concepción de la negación como un operador funcional veritativo que forma proposiciones a partir de proposiciones es ajena al pensamiento de Brouwer. En sus primeros trabajos Brouwer pensó el enunciado negativo como aquel que expresa la incompatibilidad entre dos construcciones matemáticas. Posteriormente identificó la negación con el predicado *Absurdo*. La tarea de entender lo que Brouwer dijo sobre la negación es difícil porque nunca la aisló (ni a ella ni a los otros conectivos proposicionales) como tema de investigación. En el caso de la negación, se refiere a ella en el medio de discusiones sobre el principio del tercero excluido, o sobre la teoría de las especies (Menge), como en el artículo del año 1923 *Intuitonistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe (Análisis intuicionista de los conceptos básicos de la matemática)*[3], que motivó las investigaciones ulteriores que culminaron con la construcción, por Heyting de la lógica intuicionista en los años treinta del siglo pasado. La razón de este proceder es que Brouwer nunca manifestó estima por la Lógica. Para Brouwer la Lógica está relacionada con el Lenguaje, mientras que la Matemática es una actividad esencialmente no lingüística. El tema de la Matemática son las construcciones mentales efectuadas por el sujeto. El lenguaje sólo sirve como medio, a veces defectuoso, para comunicar a otros nuestras construcciones.

No podemos tratar de la negación en Brouwer sin referirnos a sus tesis sobre la relación entre Matemática, Lenguaje y Lógica, ni sin hablar de la evolución intelectual de Brouwer ni dejar de mencionar conceptos de la Matemática intuicionista como los de especie y secuencias de elección libre .Brouwer desarrolló sus teorías matemáticas en estrecha conexión con sus concepciones filosóficas .Ya podemos registrar antes de su tesis doctoral su interés por temas filosóficos [4]. En su tesis doctoral y en muchos de sus artícu-

3 Ver nota 13

4 En 1905 dos años antes de la publicación de su tesis doctoral Brouwer escribió un texto en holandés con el título de *Leven, Kunst en Mystiek* (vida, arte y mística). Una introducción, junto con una traducción al inglés de este trabajo se encuentra en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, 1996, p.xx

los encontramos pasajes bastante extensos conteniendo la discusión de problemas filosóficas: la relación entre pensamiento y lenguaje, la formación de la conciencia, el papel del conocimiento científico. Ese tipo de disquisiciones de Brouwer es generalmente pasado por alto por los filósofos, porque esos pasajes se encuentran en el medio de la exposición de conceptos y teorías matemáticas de difícil comprensión, por los matemáticos porque a primera vista serían ajenas a las cuestiones técnicas discutidas.

En su tesis doctoral del año 1907 *Sobre los fundamentos de la Matemática*, en su artículo del año 1908 *Sobre la falta de confianza de los principios lógicos*, y en su artículo del año 1912 *Intuicionismo y formalismo*[5] (los dos primeros textos aparecieron en holandés, el último tuvo una traducción inmediata al inglés publicada por el *Bulletin Am. Math. Soc)*, Brouwer presentó sus principales concepciones filosóficas, su polémica con los formalistas y los logicistas, su rechazo a la teoría cantoriana de los conjuntos . Es en esta fase que Brouwer realizó aquello que en uno de sus últimos trabajos llamará como la primera acción del intuicionismo.

Primera Acción del Intuicionismo

> *separar completamente la matemática del lenguaje que expresa la matemática, en particular de los fenómenos del lenguaje que son descriptos por la lógica teórica, y reconocer que la matemática intuicionista es esencialmente una actividad no lingüística de la mente que tiene su origen en la percepción del movimiento del fluir temporal(of a move of time), esto es de la separación de un momento de la vida (of the falling apart of a life moment) en dos cosas distintas, una de las cuales es retenida por la memoria. Si esa dualidad (two-ity) generada de esa forma, es desprovista de toda cualidad, queda la forma vacía del substrato común de todas las dualidades. Ese sustrato común, esa forma vacía, es lo que es objeto de la intuición matemática .*[6]

En verdad en este texto tardío, que en esta parte nos hace recordar el libro XI de las *Confesiones* de San Agustín, Brouwer vuelve a repetir las tesis sobre la relación entre Matemática y Lenguaje que él ya había presentado en

5 Esos tres trabajos pueden consultarse en los *Collected Works* I de Brouwer, editados por North Holland en 1975.

6 Brouwer 1952 Historical Background., Principles and methods of intuitionism in: L.E.J Brouwer *Collected Works* I, Amsterdam: North Holland, 1975.p.508-515

sus trabajos de 1907 y 1908 citados arriba. En esos primeros textos la negación aparece como la expresión de la incompatibilidad entre dos realidades. Un enunciado negativo expresa la incompatibilidad entre dos construcciones matemáticas representadas respectivamente por el sujeto y por el predicado del enunciado. *"Observo precisamente que la construcción (expresada por el sujeto del enunciado) no progresa, que en el edificio principal no hay lugar para la estructura puesta"*[7] .En el artículo de 1908 sobre los principios lógicos se refiere a la negación como la expresión de la imposibilidad de subsumir (imbedding según el traductor al inglés) o de hacer una inmersión de un sistema matemático de objetos en otro" [8] En estos trabajos el tratamiento de la negación aparece en el contexto de la discusión sobre el Principio del tercero excluido, identificado por Brouwer con la afirmación de que todo problema matemático es soluble.

Si nuestra interpretación no está errada, en estos escritos Brouwer está pensando la negación como una operación efectuada sobre dos construcciones mentales. Si afirmamos que la raíz cuadrada de 2 no es racional, lo que queremos decir es que si tomamos por un lado la construcción del ente matemático que es la raíz cuadrada de 2 y si tomamos por otro lado el sistema ya construido de los números racionales, el intento de encajar esa construcción de la raíz de 2 dentro del sistema de los números racionales fracasa. Ya vimos que Aristóteles había pensado la negación como la expresión de la incompatibilidad entre dos realidades. Pues, según el filósofo griego, el enunciado negativo expresa la separación entre dos cosas. Si decimos que A no es B estamos separando A de B. Posteriormente los intuicionistas, quisieron hacer más precisa la caracterización brouweriana de la negación, al pensarla como una operación efectuada sobre una prueba. No A será la construcción que a partir de una prueba Π de A dará lugar a una prueba Φ de un enunciado absurdo como 0=1. Mas esta última concepción es ajena a Brouwer.

Podemos entender esta primera acción del intuicionismo a partir de las concepciones de Brouwer sobre el lenguaje . En *Intuitionistische Betrachtungen über den Foramlismus* (*Reflexiones intuicionistas sobre el formalismo)* [9], artículo del año 1928, Brouwer afirma que el intuicionismo matemático reposa en cuatro máximas: Primero, la distinción entre la construcción de un depósito de fórmulas matemáticas y la teoría intuitiva (con contenido, *inhal-*

---

7 L.E.J Brouwer *Collected Works*, I p.73
8 *Ibidem*, p.109
9 Este artículo se encuentra traducido al inglés en la Antologia de Paolo Mancosu *From Brouwer to Hil*bert: The debate on the foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford University Press, 1998.

tlich) de las leyes de esa construcción, así como el reconocimiento de que para la última, la teoría intuicionista de los números naturales es indispensable; segundo, el rechazo del uso irreflexivo del Principio del tercero excluido, así como el reconocimiento de que las investigaciones sobre las razones que justifican ese principio y sobre su dominio de validez constituyen una parte esencial de la investigación sobre los fundamentos de la Matemática, y de que en la Matemática con contenido (intuitiva) ese uso está restricto a sistemas finitos; tercero, la identificación del Principio del tercero excluido con el principio de la solubilidad de todo problema matemático; cuarto, el reconocimiento de que la justificación (con contenido, *inhaltlich*) de la Matemática formalista por medio de una prueba de consistencia contiene un círculo vicioso, puesto que esa justificación está basada en la corrección (con contenido) de la afirmación de que la corrección de una proposición se sigue del hecho de que no sea contradictoria, esto es, de la corrección (con contenido) del Principio del tercero excluido. Aquí Brouwer percibe el vínculo estrecho entre el Principio del Tercero excluido y la regla de reducción al absurdo. Pues, el hecho de que una proposición no sea contradictoria, se expresa como la negación doble de esa proposición.

No hay en Brouwer, como sí hay en Dummett, una teoría sobre el lenguaje que fundamente su Filosofía de la Matemática. En Brouwer tenemos la situación inversa: es su concepción sobre la Matemática la que tornaría plausibles sus concepciones sobre el lenguaje. Brouwer interpretaba sus diferencias con los formalistas como teniendo su origen en visiones diferentes sobre las relaciones entre Matemática y Lenguaje. Ya en su tesis del año 1907 Brouwer era consciente de eso. Para Brouwer la Matemática debía ser construida paso a paso, y el lenguaje sólo puede indicar cómo realizar esas construcciones. Mas por otro lado, no hay exactitud ni certeza en la transmisión de los deseos de nuestra voluntad, en especial cuando se trata de la construcción de entidades matemáticas, cuyas formas de producción deberían ser indicadas por el hablante por medio del lenguaje. En su tesis doctoral de 1907, disertando sobre las Geometrías no arquimedianas estudiadas por Hilbert, Brouwer apuntaba para las consecuencias perturbadoras que surgen cuando el lenguaje, que es un medio, aunque imperfecto, para comunicación de la Matemática, y que no tiene que ver con ella como tal, excepto como acompañamiento, es considerado como esencial para aquella ciencia, y cuando las leyes que gobierna la sucesión de proposiciones, las leyes lógicas, son vistas como directivas para actos de construcción de entidades matemáticas [10] .En consecuencia, no

10 Brouwer *Collected Work sI.* P.79

hay para la Matemática pura, dice Brouwer en su conferencia del año 1928 *Matemática, ciencia y lenguaje,* ningún lenguaje cierto, esto es, ningún lenguaje que en el intercambio de pensamientos excluya el malentendido y que como una ayuda para la memoria esté libre de error [11]. Esas limitaciones del lenguaje natural, pensaba Brouwer, no podían ser resueltas como pretendía la escuela formalista, regimentando el lenguaje natural y sometiéndolo a un abordaje matemático. Brouwer era consciente de que el lenguaje que comunica las construcciones matemáticas manifiesta ciertas regularidades en su sintaxis y en la conexión que hay entre las proposiciones expresadas en él, y que por eso puede ser abordado formalmente. Ése es el origen de la Lógica. Con posterioridad la Lógica puede ser abordada matemáticamente, tendríamos entonces la Logística. de Russell. Sin embargo, el uso de la Logística no excluye la posibilidad del error.

Lo que debe ser notado aquí es que Brouwer innova en relación a la tradición escéptica sobre el lenguaje. Esa tradición ya iniciada por los sofistas, afirmaba la incapacidad del lenguaje para trasmitir nuestras representaciones mentales. Se trataba aquí de la imposibilidad de trasmitir conocimientos, de que el hablante y el oyente asociaran idénticos significados a las mismas palabras. En Brouwer, por el contrario, tenemos un escepticismo en relación a la capacidad del lenguaje para trasmitir nuestra voluntad. Nuestra comunicación lingüística puede fallar cuando indica a nuestro oyente cómo realizar una construcción matemática determinada.

Para los formalistas la relación entre Matemática y lenguaje es otra. Si pudiera probarse que una teoría matemática, no es contradictoria, eso nos aseguraría que ella se refiere a un dominio de entidades. Porque a partir del descubrimiento de las geometrías no euclidianas, la existencia matemática volvió a ser identificada de manera leibniziana, con la ausencia de contradicción. Para demostrar la no contradicción de la teoría en cuestión es preciso expresar de forma matemática (usando los símbolos y la sintaxis de la logística) el lenguaje en el cual ella está formulada, y probar que dentro de ese lenguaje no puede derivarse la figura de la contradicción.

En *Mathematik, Wissenschaft und Sprache*(*Matemática, ciencia y lenguaje*), conferencia dada en el año 1928 en Viena [12], Brouwer nos da una explicación del origen de la confianza de los formalistas en el lenguaje. En la antigüedad, dice Brouwer, el hombre tenía a su disposición un lenguaje perfecto, que excluía errores, lenguaje que se refería a grupos finitos de co-

11 *Ibidem*, p.421
12 Brouwer. *Collected Works* I, p.417-428

sas en el espacio y en el tiempo, concebidas como unidades y substancias. Es probable que aquí Brouwer se estuviese refiriendo al lenguaje en el que está expresada la ciencia y la filosofía de los griegos. Como es bien sabido, la imagen del Universo de los griegos es la de un Cosmos finito y jerarquizado, y su ciencia excluye la consideración de lo infinito. En ese lenguaje-continúa Brouwer- hay formas de pasar de afirmaciones correctas a otras afirmaciones correctas, esas formas de inferencia son conocidas como las leyes de Identidad, de Contradicción, del Tercero Excluido y del Silogismo. No podemos dejar de señalar la exactitud del análisis de Brouwer al concebir la Lógica de los antigüos como un sistema de reglas de inferencia y no como un cuerpo de axiomas. Al razonar sobre sistemas finitos el uso de esos principios lógicos se mostró correcto. Eso llevó a las personas a creer en ellos, aún cuando, advierte Brouwer, las conclusiones obtenidas por esos principios no pudiesen ser verificadas directamente. Sobre todo se confió en el Principio del tercero excluido, entendido también en su forma más general, que asume que un hecho aconteció, sólo sobre la base de la imposibilidad de encontrar una explicación alternativa para la producción de otro hecho que le sigue en la serie temporal (una especie de inferencia a la mejor hipótesis). Es claro que a veces, nos dice Brouwer, el uso de ese principio lleva a conclusiones erróneas, pero las personas no abandonaron su fe en el Principio del Tercero Excluido ajustando las experiencias de forma a concordar con él.

Hay dos errores que están detrás de la confianza ingenua en los principios lógicos, afirma Brouwer. El primero es un error filosófico y se origina en una concepción equivocada sobre el lenguaje. Los hombres, nos dice Brouwer, no reconocieron que las palabras son en su esencia instrumentos para trasmitir nuestra voluntad, y las trataron como etiquetas para conceptos. Se pensó que esos conceptos y las relaciones entre ellos nos llevarían a existencias independientes de la actitud causal del hombre, y se consideró que los principios lógicos representarían las leyes *a priori* que gobiernan esos conceptos y sus relaciones recíprocas. El segundo error radica en la confusión entre los modelos matemáticos de la realidad percibida y esa misma realidad. Los hombres, afirma Brouwer, han conseguido controlar los objetos observables y los mecanismos del mundo perceptivo cuando se trata de complejos extendidos de hechos y eventos, considerando y tratando el sistema de esos objetos y mecanismos en el mundo espaciotemporal como parte de un sistema finito y discreto de objetos cuyos elementos están ligados por un número finito de relaciones.

III. La negación y la segunda acción del intuicionismo

El artículo del año 1918-1919 *Begrundung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten* (*Fundamentación de la teoría de conjuntos independientemente del principio lógico del tercero excluido*) marca la segunda fase en la evolución del intuicionismo de Brouwer. Se inicia aquí lo que Brouwer posteriormente llamará la Segunda Acción del intuicionismo que reconoce la posibilidad de generar nuevas entidades matemáticas.

> *En primer lugar secuencias infinitas progresivas p1, p2,….pn cujos términos son elegidos mas o menos libremente a partir de entidades matemáticas previamente adquiridas; de modo tal que la libertad de elección existente quizás para el primer término p1, pueda estar sujeta a una restricción r al elegir un término ulterior pv, y así de nuevo, hasta llegar a restricciones más rígidas, o inclusive hasta la supresión de la liberdad de elección sobre los elementos siguientes p'v, en la medida que todas estas intervenciones restringidas del sujeto, del mismo modo que todas las elecciones de los p'v, en cualquier fase del proceso pueden depender de experiencias matemáticas posibles del sujeto creativo;*
> *En segundo lugar en la forma de especies matemáticas, esto es, propiedades pensables de entidades matemáticas previamente adquiridas, y que satisfacem la condición de que, si ellas valen para una entidad matemática determinada, también valen para todas las entidades matemáticas que han sido definidas como iguales a aquella, relaciones de igualdad que son simétricas, reflexivas y transitivas; aquellas entidades matemáticas previamente adquiridas para las cuales vale la propiedad son llamadas elementos de la especie.* [13]

A partir del año 1918 Brouwer emprende la parte positiva de su programa. No era suficiente criticar al formalismo y al logicismo a partir de concepciones filosóficas de gran generalidad. Era preciso, siguiendo esas concepciones filosóficas, proceder a una reedificación de la Matemática. Brouwer había percibido la dificultad de reconstruir el continuo geométrico usando sólo secuencias de Cauchy de números racionales dadas por una ley (lo que en principio parecería estar de acuerdo con el espíritu del intucionismo). Se

13 L.E.J.Brouwer *Collected Works* I p. 511

encontró obligado a admitir secuencias de elección libre. Lo que caracteriza a estas secuencias, es que, desde el punto de vista intuicionista, quedan caracterizadas a partir de un segmento contenido en ellas "suficientemente grande". Podemos definir sobre tales secuencias funciones cuyos valores sean también secuencias de elección libre.

No entraremos en los detalles de la construcción brouweriana del continuo geométrico y del Análisis real, que nos llevaría lejos del objetivo de este texto. Lo que nos interesa es lo siguiente: en ese período, en el cual Brouwer estaba ocupado en reconstruir los fundamentos del Análisis, Brouwer mudó su concepción sobre la negación. En el año 1923 Brouwer escribió el artículo *Intuitionistische Zerlegung matematischer Grunbegriffe (Análisis intuicionista de los conceptos básicos de la Matemática,* en el mismo año también apareció una versión en holandés, con un contenido algo diferente)[14] . En esos artículos Brouwer identifica la negación con el predicado del absurdo. No A significa A es absurdo (Abs A). Pero ese predicado se aplica no sólo a proposiciones, sino también a predicados. Fue este artículo, como ya dijimos, el que originó las investigaciones posteriores sobre Lógica intuicionista. Investigaciones que dejaron rápidamente de interesar a Brouwer por juzgar que trabajar en Lógica era un ejercicio intelecutal inútil.

En ese texto Brouwer prueba que AbsAbsAbs es equivalente a Abs. La prueba procede así: En general vale que al considerar dos predicados ***x*** e ***y*,**. si de ***x*** se sigue ***y***, inferimos que de Abs ***y*** se sigue Abs ***x*** (por contraposición). Como sabemos que de ***x*** se sigue AbsAbs ***x***, contraponiendo podemos concluir que de AbsAbsAbs ***x*** se sigue Abs ***x***. Ahora, sabemos que de ***y*** se sigue AbsAbs ***y***, considerando Abs ***x*** como ***y***, tenemos que de Abs ***x*** se sigue AbsAbsAbs ***x*.**

14 Este artículo se encuentra traducido al inglés en la Antología de P.Mancosu, *From Brouwer to Hilbert* . The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920' s. Oxford University Press, 1988. p.290-292

Referências Bibliográficas

Aristóteles *De Interpretatione e Categorias.* In: Tratado de Lógica: Organon. Madri: Gredos, 1988

________. *Organon I Catégories, II De l ' interpretation.* Tradução J. Tricot. Paris: Vrin, 1984

Brouwer, L.E.J. "Leven, Kunst en Mystiek". Ingles in: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, 1996, p.xx

________.*Collected Works* I, Amsterdam: North Holland, 1975.p.508-515

Frege, G. "Die Verneinung: eine logische Untersuchung". In: G.Frege *Logische Untersuchungen.* Göttingen: Vandenhoeck e Ruprecht 2 edição 1976. p. 67

Mancosu, P. *From Brouwer to Hil*bert: *The debate on the foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998.