Luiz Carlos Pereira[1]
Edward H. Hauesler[2]
Maria da Paz N. de Medeiros[3]

Alguns Resultados sobre Fragmentos com Negação da Lógica Clássica

Resumo
O objetivo principal do presente artigo é investigar algumas características construtivas dos fragmentos {¬, ∧, ⊥, ∀} e {¬, ∧, ⊥, ∃} da lógica clássica de primeira ordem.

Palavras-chave: Lógica clássica . Fragmentos . Construtivismo

Abstract
The aim of the present paper is to investigate some contructive features of the fragments {¬, ∧, ⊥, ∀} and {¬, ∧, ⊥, ∃} of first oder classical logic.

Key-words: Classical logic . Fragments . Constructivism

I. Introdução

No final da década de 20 e no início dos anos 30, vários resultados foram obtidos sobre conexões interessantes entre sistemas formais clássicos e seus correspondentes intuicionistas. Os teoremas de Glivenko [2] certamente ocupam uma posição de destaque entre esses resultados:

1 Professor do Departamento de Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Pesquisador do CNPq. E-mail: luiz@inf.puc-rio.br
2 Professor do Departamento de Informática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Pesquisador do CNPq. E-mail: hermann@inf.puc-rio.br
3 Professora do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. E-mail: mpaz@ufrnet.br

Glivenko 1: Se A é um teorema proposicional clássico, então $\neg\neg A$ é um teorema proposicional intuicionista.

Glivenko 2: Se $\neg A$ é um teorema proposicional clássico, então $\neg A$ é um teorema proposicional intuicionista.

Outras conexões foram estabelecidas sob a forma de traduções (ou interpretações) de sistemas clássicos para (em) sistemas intuicionistas, tais como as traduções (interpretações) propostas por Kolmogorov [4], Gödel [3] e Gentzen [1], até hoje marcos importantes dessa família de resultados. Como um resultado preparatório para a definição de uma função de interpretação da aritmética de Peano na aritmética de Heyting, Gödel prova que o fragmento $\{\neg, \wedge\}$ é incapaz de distinguir teoremas clássicos de teoremas intuicionistas. O argumento de Gödel é bastante engenhoso. Primeiramente, Gödel prova que todo teorema clássico no fragmento $\{\neg, \wedge\}$ possui uma forma canônica:

> Lema: Se A é um teorema clássico no fragmento $\{\neg, \wedge\}$, então existem $B_1, \ldots, B_n$, tal que $A \equiv \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n$.

Com o auxilio desse lema Gödel demonstra por indução sobre a complexidade de A que:

> Teorema: Seja $A \in \{\neg, \wedge\}$. Se $\vdash_C A$, então $\vdash_I A$.
> Prova: Como pelo lema A tem a forma $\neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_n$, o teorema segue-se diretamente de Glivenko 2.

A moral curiosa embutida nesse resultado de Gödel é que podemos fazer lógica proposicional clássica sem usar lógica clássica!

Nosso objetivo com este pequeno artigo é investigar algumas características construtivas dos fragmentos $\{\neg, \wedge, \bot, \forall\}$ e $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$ da lógica clássica de primeira ordem. Obviamente, a idéia de fragmento diz respeito apenas a uma restrição de natureza lingüística, dado que, através de definições bem conhecidas, não há nenhuma perda do ponto de vista da lógica.

II. Um pouco de teoria da prova

Recordaremos brevemente agora dois resultados importantes da teoria da prova que serão utilizados um pouco mais adiante.

Em 1965, Dag Prawitz [6] e Andrés Raggio [7] provam de modo independente, pela primeira vez, o teorema de normalização para a lógica clássica. A estratégia de Prawitz pode ser descrita, em termos muito gerais, da seguinte maneira:

1. Transformar toda derivação Π no fragmento {¬, ∧, →, ⊥, ∀} em uma derivação Π' tal que toda aplicação do absurdo clássico em Π' possui conclusão atômica.
2. Normalizar Π' aplicando o procedimento de normalização para a lógica intuicionista.

Uma outra estratégia de normalização não tão conhecida, mas nem por isso menos interessante, é devida a Jonathan Seldin [8,9]. A estratégia de Seldin pode ser descrita, em termos muito gerais, do seguinte modo:

1. Transformar toda derivação Π no fragmento {¬, ∧, ∨, →, ⊥, ∃} em uma derivação Π' tal que Π' contenha no máximo uma aplicação da regra do absurdo clássico. Caso essa aplicação de fato ocorra, ela é a última regra aplicada em Π'.
2. Se Π' é intuicionista, normalizar Π' aplicando o procedimento de normalização para a lógica intuicionista; caso Π' seja clássico, normalizar a subderivação intuicionista determinada pela premissa (⊥) da última e única aplicação do absurdo clássico.

Ë interessante observar que os teoremas de Glivenko são conseqüências triviais da estratégia de normalização de Seldin.

III. O fragmento {¬, ∧, ⊥, ∀}

Como é bem sabido, o fragmento {¬, ∧, ⊥, ∀} é suficiente para distinguir a lógica de primeira ordem clássica da lógica de primeira ordem intuicionista. Um exemplo interessante de um teorema clássico no fragmento que não é um teorema intuicionista é a seguinte versão do silogismo disjuntivo:

$$\neg(\forall x\neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \forall x\neg Q(x) \wedge \neg\forall x P(x))$$

No entanto, podemos obter vários resultados interessantes sobre características construtivas do fragmento {¬, ∧, ⊥, ∀}. Um desses resultados estabelece que a negação é construtivamente involutiva nesse fragmento.

Teorema 1: Seja $A \in \{\neg, \wedge, \bot, \forall\}$. Se $\vdash_I \neg\neg A$, então $\vdash_I A$.
Prova: Indução sobre a complexidade de A. O caso base é vácuo. Os outros casos seguem-se diretamente da hipótese indutiva e dos resultados:
(a) $\{\neg\neg(B \wedge C)\} \vdash_I (\neg\neg B \wedge \neg\neg C)$
(b) $\{\neg\neg\forall xB\} \vdash_I \forall x\neg\neg B$
(c) $\{\neg\neg\neg B\} \vdash_I \neg B$

Outro resultado interessante estabelece que a dupla negação pode ser construtivamente externalizada com respeito ao quantificador universal.

Teorema 2: Seja $A \in \{\neg, \wedge, \bot, \forall\}$. Se $\vdash_I \forall x\neg\neg A$, então $\vdash_I \neg\neg\forall xA$.
Prova: o resultado segue-se diretamente da involução construtiva da negação.

Vejamos agora um último resultado sobre o fragmento $\{\neg, \wedge, \bot, \forall\}$;
Teorema: Seja A uma fórmula em $\{\neg, \wedge\}$. Então , $\vdash_C \neg\forall xA \Rightarrow \vdash_I \neg\forall xA$.
Prova:
(a) $\vdash_C \neg\forall xA \Rightarrow \vdash_C \exists x\neg A$
(b) $\vdash_C \exists x\neg A \Rightarrow \neg\exists x\neg A \vdash_I \bot$ (estratégia de normalização de Seldin).
(c) $\forall xA \vdash_I \neg\exists x\neg A$
(d) $\forall xA \vdash_I \bot$ (em $\{\neg, \wedge, \forall\}$, pela estratégia de normalização de Prawitz)
(d) $\vdash_I \neg\forall xA$

IV. O fragmento $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$

O fragmento $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$ também é suficiente para distinguir a lógica de primeira ordem clássica da lógica de primeira ordem intuicionista. Um exemplo interessante de um teorema clássico nesse fragmento que não é um teorema intuicionista é o seguinte:

$\exists x\neg(\neg P(x) \wedge \exists x(P(x))$

Mesmo não sendo construtivo, o fragmento $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$ possui várias características construtivas interessantes.

Teorema: Se $\vdash_C \neg A$, então $\vdash_I \neg A$.
Prova: diretamente da estratégia de normalização de Seldin.

Esse resultado pode ser lido como uma extensão de Glivenko 2 para a lógica de primeira ordem (ver [6]).

Teorema 3: Seja $\exists xA$ uma sentença em $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$ tal que A seja livre de quantificadores. Se $\vdash_C \exists xA$, então $\vdash_I \exists xA$.

Prova: $\vdash_C \exists xA \Rightarrow \vdash_C \neg\forall x\neg A \Rightarrow \vdash_I \neg\forall x\neg A \Rightarrow \forall x\neg A \vdash_I \bot \Rightarrow$
$\exists x\neg A \vdash_I \bot \Rightarrow \vdash_C \forall xA \Rightarrow \vdash_C A \Rightarrow \vdash_I A \Rightarrow \vdash_I \exists xA$.

Teorema 4: Seja A uma sentença no fragmento $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$ tal que nenhum quantificador em A ocorre no escopo de outro quantificador. Nesse caso, se $\vdash_C A$, então $\vdash_I A$.

Prova: indução sobe a complexidade de A.

Base: A é uma sentença atômica. Trivial.

Passo indutivo:

(a) A é $\neg B$ para algum B. O resultado é uma conseqüência imediata de Glivenko 2 para o $\{\neg, \wedge, \bot, \exists\}$.

(b) A é $(B \wedge C)$. Diretamente da hipótese indutiva.

(c) A is $\exists xB(x)$. Diretamente do teorema 1.

Uma leitura interessante desse resultado é que para obtermos a lógica clássica de primeira ordem, necessitamos de iteração de quantificadores!

V. Considerações finais

(a) Os resultados de Gentzen e de Gödel permitem uma leitura análoga a que fizemos no final da introdução: podemos fazer aritmética clássica sem lógica clássica. De fato, podemos obter uma formulação mais geral desse tipo de resultado:

- Seja T uma teoria formulada em $\{\neg, \wedge, \rightarrow, \bot, \forall\}$. Se T é atomicamente estável ($A\leftrightarrow\neg\neg A$, para A atômico) e os axiomas não lógicos e as regras de T não embutem princípios clássicos, então se $\vdash_{TC} A$, então $\vdash_{TI} A$.

(b) O fragmento implicacional $\{\rightarrow\}$ é particularmente interessante, pois é suficiente para distinguir a lógica proposicional clássica da lógica proposicional intuiconista; o exemplo usual de um teorema clássico não demonstrável intuicionisticamente é a formula de Peirce, $(((A\rightarrow B)\rightarrow A)\rightarrow A)$. O sistema de dedução natural definido pelas regras de introdução e eliminação para a implicação e a pela regra de Peirce

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(A \rightarrow B)] \\ | \\ A\end{array}}{A}$$

satisfaz a estratégia de normalização de Prawitz, mas não a de Seldin. Seria certamente interessante investigar traduções/interpretações baseadas nesse fragmento ou mesmo em outras extensões sem negação desse fragmento.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos professores Wagner Sanz e Rodolfo Ertola pela leitura cuidadosa que fizeram de nosso texto e pelas valiosas sugestões e correções.

Referências bibliográficas

Gentzen, Gerhard. "On the Relation between Intuitionist and Classical Arithmetic", in *The collected works of Gerhard Gentzen*, ed. M Szabo, North-Holland, 1969, pp.53 – 67 (1933).

Glivenko, M.V. "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer", in *Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe de Sciences*, series 15, v.15, 1929, pp. 183 – 188.

Gödel, Kurt. "On Intuitionistic Arithmetic and Number Theory", in *Kurt Gödel – Collected Works,* v. 1, publications 1929-1936, OUP, 1986, pp. 287-295 (original 1933).

Kolmogorov, A.N. – O principé tertium non datur (sur le principe de tertium non datur), *in Mat. Sb. (Recueil mathématique de la Société de Mathématiquede Moscou)*, vol. 32, pp. 646 – 667, 1925. Tradução inglesa: On the Principle of the Excluded Middle, in *From Grege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic 187 – 1931*, ed. By J. van Heijnoort, Haward University Press, pp. 414 – 437, 1977.

Medeiros, Maria da Paz N. *Traduções via Teoria da Prova: aplicações à lógica linear,* EDUFRN, 2002.

Medeiros, Maria da Paz N., Sanz, W., Pereira, L.C. A Trivial Extension of Glivenko's Theorem to First Order Logic (manuscrito)

Prawitz, Dag. *Natural Deduction*, Almqvist & Wiksel, Stockholm, 1965.

[8] Raggio, Andrés. "Gentzen's Hauptsatz for the System NI and NK", in *Logique et analyse*, vol. 30, pp. 91 – 100, 1965.

Seldin, Jonathan. “On the Proof Theory of the Intermediate Logic MH”, in *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 51, pp. 626 – 647, 1986.

________. “Normalization and Excluded Middle”, in *Studia Logica*, vol. 48, pp. 193 – 217, 1989.