nota

Abel Lassalle Casanave
Frank Thomas Sautter
Gisele D. Secco

Abstração como operação lógica em Aristóteles

No intuito de rejeitar as formas platônicas, Aristóteles introduz em sua filosofia da matemática a obscura operação de abstração.[1] Em um importante artigo,[2] cujo conteúdo foi essencialmente reproduzido depois em seu já clássico livro sobre Aristóteles,[3] J. Lear elucidou a operação de abstração como operação *lógica*– e não real – de separação. Segundo Lear, um objeto *a* enquanto triângulo (a *qua* F nas fórmulas seguintes) possui a propriedade de que a soma de seus ângulos internos seja dois retos se e somente se: a) *a* é um triângulo; b) para qualquer objeto, se ele for um triângulo então a soma de seus ângulos internos é igual a dois retos. Sendo F e G propriedades quaisquer, define-se a operação de abstração da seguinte maneira:

$$G\,(a\ \textit{qua}\ F)^{*} \equiv_{df} F(a) \wedge (x)\,(F(x) \rightarrow G(x)).$$

Sem conhecimento do antecedente, J. da Silva apresentou uma elucidação semelhante [4] – porém não idêntica– da mesma operação:

$$G\,(a\ \textit{qua}\ F)^{**} \equiv_{df} G(a) \wedge (x)\,(F(x) \rightarrow G(x)).$$

1 No que segue, ocupar-nos-emos na abstração em geometria, deixando para uma breve consideração final o caso da aritmética.
2 Lear. "Aristotle´s Philosophy of Mathematics". In: *The Philosophical Review*, 91, 1982, (2): 161–192.
3 Lear. Aristóteles. *El deseo de comprender.* Madrid: Alianza Editorial, 1994, sec. 6.2, pp. 261-278. (Tradução espanhola de Aristotle. *The desire to understand*. Cambridge University Press, 1988.)
4 Da Silva, J. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007, pp. 56-64.

As duas definições acima são definições contextuais: não definem *a qua* F, mas *a qua* F ter uma propriedade qualquer. Das duas definições resulta a eliminabilidade do definido, sendo portanto os "abstratos" entendidos como meras *façons de parlez*. Pode-se dizer que a propriedade F funciona como um filtro de todas as propriedades em relação às quais F não está subordinada. Metaforicamente: ao considerar *a qua* F "apagamos" do objeto sensível toda e qualquer propriedade que não dependa de F.

Por certo, Lear fala simplesmente de abstração, enquanto que da Silva fala de abstração *idealizante*. O cerne da diferença encontra-se na aceitação ou não de objetos físicos como sendo instâncias "perfeitas" de conceitos geométricos. Como para da Silva não há tais objetos, a idealização complementa "aperfeiçoando", por assim dizer, o resultado da abstração. Lear não necessita desse componente idealizante na medida em que atribui a Aristóteles a tese de que existem tais instâncias perfeitas de conceitos matemáticos. Seja como for, para dar conta da geometria, os dois autores necessitam recorrer, para além da abstração, à noção usual de construção da geometria euclidiana.

Dissemos acima que as duas definições de abstração não são equivalentes. Com efeito, a segunda é mais fraca do ponto de vista lógico que a primeira. Por G (a *qua* F)*, temos F(a) *e* (x) (F(x) → G(x)). Da última fórmula se segue, em particular, F(a) → G(a). Desta e F(a) se segue G(a). Logo, temos tanto G(a) quanto (x) (F(x) → G(x)), que por definição é G(a *qua* F)**. Assim, da definição de Lear se segue a de da Silva. Porém, a recíproca não é verdadeira. Com efeito, seja um objeto retangular não-quadrado *a* considerado enquanto quadrado. Ora, é verdade: a) que *a* tem seus quatro lados iguais e b) que para qualquer objeto se ele é um quadrado então tem seus quatro lados iguais. Logo, como os dois conjuntivos da definição são verdadeiros, é o caso que G (a *qua* F)**. Porém, *a* não é um quadrado, logo, não é o caso que G (a *qua* F)*, pois um dos conjuntivos é falso. Portanto, da definição de da Silva não se segue a de Lear. Podemos resumir dizendo que G(a *qua* F) → F(a) é teorema para Lear, porém não para da Silva.

Lear apresenta uma pormenorizada discussão de sua definição, acompanhada pelo aparato crítico próprio de uma grande estudioso de Aristóteles; porém não apresenta as conseqüências lógicas de sua definição de abstração, como faz da Silva. Dado que a definição de da Silva se segue da de Lear, os teoremas a seguir são comuns[5]:

5 Para as respectivas demonstrações, veja-se o *Apêndice* a esta nota.

a) Se *a* tem a propriedade F, *a qua* F também possui a propriedade F. Em símbolos: F(a) → F (a *qua* F). Em outras palavras: uma propriedade F qualquer subordina a si própria. A recíproca "F (a *qua* F) → F(a)" se segue da definição.

b) Se *a qua* F tem a propriedade G e um objeto *b* tem F, então *b qua* F tem também a propriedade G. Em símbolos: G(a *qua* F) ∧ F(b) → G(b *qua* F). Se *a* enquanto F possui uma propriedade e um objeto qualquer possui F, então esse objeto também possui G, isto é, as propriedades que valem para um objeto *a* enquanto F valem para qualquer objeto que também possua F.

Um aspecto interessante, ausente em Lear, é que da Silva estende a operação de abstração à abstração de propriedades. Assim, supondo que F seja uma propriedade de objetos reais, pode-se considerar, independentemente do objeto do qual a propriedade F seja uma propriedade, uma *forma F* determinada por esse aspecto considerado em si. Sendo *G* uma propriedade possível de objetos reais, definimos contextualmente uma forma possuir uma propriedade da seguinte maneira:

$$G(\mathbf{F}) \equiv_{df} (x)\ (F(x) \rightarrow G(x)).$$

De acordo com esta definição contextual, uma forma **F** possui a propriedade G quando a extensão da propriedade F (o conjunto de todos os objetos que satisfazem essa propriedade) é subconjunto da extensão da propriedade G – ou seja, quando F é logicamente subordinada a G. Como conseqüências dessa definição têm-se:

c) F(**F**). Obviamente, pois toda propriedade se subordina a si própria.

d) G(**F**) ∧ F(a) → G(a *qua* F). Se uma forma possui uma propriedade e um objeto **a** possui a propriedade da qual a forma é abstração, então o objeto **a** possui também a propriedade em questão.

Dado que a idéia de abstração de propriedades é identificar uma forma com a extensão de objetos que possuem a propriedade abstraída, define da Silva a identidade de formas da seguinte maneira:

$$(\mathbf{F} = \mathbf{G}) \equiv df\ (x)\ (F(x) \leftrightarrow G(x))$$

Isto é, quando duas formas se aplicam a exatamente os mesmo objetos são iguais. Algumas conseqüências dessa definição são:

e) ($\mathbf{F} = \mathbf{G}$) $\equiv$ F($\mathbf{G}$) $\wedge$ G($\mathbf{F}$). Se duas formas são iguais, então as respectivas propriedades se subordinam uma à outra.

f) R($\mathbf{F}$) $\wedge$($\mathbf{F} = \mathbf{G}$) $\rightarrow$ R($\mathbf{G}$). Se duas formas são iguais, então as respectivas propriedades se subordinam uma à outra. Conseqüentemente, se uma propriedade qualquer se subordina a F, então também se subordina a G.

g) ($\mathbf{F} = \mathbf{G}$) $\equiv$ (x) (R) (R(x *qua* F) $\leftrightarrow$ R(x *qua* G)). Duas formas **F** e **G** são idênticas se e somente se para qualquer objeto **x** e para qualquer propriedade R se **x** *qua* F possui a propriedade R então **x** *qua* G também possui R, e reciprocamente. [6]

h) ($\mathbf{F} = \mathbf{G}$) $\equiv$ (R) R($\mathbf{F}$) $\leftrightarrow$ R($\mathbf{G}$). Princípio de identidade de Leibniz para formas: duas formas são idênticas se e somente se qualquer propriedade R que vale de **F** vale de **G** e reciprocamente.

Cabe se perguntar a respeito da possibilidade de aplicar estas caracterizações da abstração à aritmética. Para Lear, por exemplo, considerar "um homem enquanto homem" é selecionar a unidade de contagem, permitindo assim contar homens. (Parece surpreendente que Aristóteles, conforme Liar, somente tenha uma solução para contar objetos pertencentes a uma classe natural, sem ter pensado, por exemplo, que poderiam contar-se homens *e* cachorros, que não constituem uma classe natural.) da Silva estende a abstração à aritmética, porém claramente num sentido diferente, pois se a operação de abstração era antes definida para *um* objeto *enquanto* possuindo uma propriedade, agora consiste na abstração de *unidades*, *pares*, *triplas*, etc. de objetos *enquanto* possuindo as propriedades um, dois, três, etc. Dito de outra maneira, a abstração opera já não sobre objetos mas sobre coleções de objetos, com o recurso adicional a uma espécie de "variação livre" dos elementos das coleções que forneceria uma "intuição formal".[7] Com relação a Aristóteles,

6 A prova da recíproca à p. 60 de Da Silva (2007) é incorreta. Uma prova correta é fornecida no *Apêndice*.

7 Em no mínimo dois momentos revela Da Silva suas raízes fenomenológicas: a) quando afirma que abstrair uma propriedade F é considerar F como um substrato de predicação; b) quando recorre como agora à idéia de variação livre.

nos inclinamos a concordar com Lear; avaliar a teoria (não aristotélica) da abstração como parte de uma filosofia da aritmética apresentada (e não proposta) por da Silva escapa aos limites desta nota.

Apêndice

a) Seja por hipótese F(a). Como (x) (F(x) → F(x)) é uma lei lógica, temos tanto F(a) (por hipótese) quanto(x) (F(x) → F(x)), que é F (a *qua* F) pela definição G(a *qua* F)**. Logo, supondo F (a) se segue F (a *qua* F), isto é, F(a) → F (a *qua* F), como queríamos demonstrar.

b) Por hipótese temos G(a *qua* F) **e F(b). Por definição de G(a *qua* F) **, temos G(a) e (x) (F(x) → G(x)). Desta última fórmula, em particular, se segue F(b) → G(b). Como por hipótese, temos F(b), então temos também G(b). Logo, temos tanto G(b) quanto (x) (F(x) → G(x)), que por definição é G(b *qua* F) **. Assim, se G(a *qua* F) e F(b) então G(b *qua* F). Isto é: G(a *qua* F) ∧ F(b) → G(b *qua* F).

c) Como (x) (F(x) → F(x)) é uma lei lógica, trivialmente F(**F**) pela definição de G(F).

d) Por hipótese, G(**F**) e F(a). Pela definição de G(**F**), temos (x) (F(x) → G(x)). Desta última se segue, em particular, F(a) → G(a). Como por hipótese temos F(a), então temos também G(a). Assim, temos tanto G(a) quanto (x) (F(x) → G(x)), que por definição é G (a *qua* F). Logo, se G(**F**) e F(a) então G(a *qua* F). Em símbolos: G(**F**) ∧ F(a) → G(a *qua* F).

e) Suponhamos, em primeiro lugar, (**F** = **G**) para demonstrar o condicional da esquerda à direita. Da definição acima, (x) (F(x) ↔ G(x)). Portanto, temos (x) (F(x) → G(x)) e (x) (G(x) → F(x)). Pela definição de forma, a primeira fórmula é F(**G**) e a segunda fórmula é G(**F**). Logo, (**F** = **G**) → F(**G**) ∧ G(**F**). Para demonstrar o condicional de direita à esquerda, suponhamos F(**G**) e G(**F**). De cada uma delas se segue, por definição, (x) (F(x) → G(x)) e (x) (G(x) → F(x)). Assim, (x) (F(x) ↔ G(x)), que por definição de identidade de formas é **F** = **G**.

f) Por hipótese, R(**F**) e (**F** = **G**). Desta última, por definição de identidade de formas, (x) (F(x) ↔ G(x)). Logo, por definição de bicondicional, (x) (G(x)

$\rightarrow$ F(x)). Porém de R(**F**) se segue (x) (F(x) $\rightarrow$ R(x)). Assim, das últimas duas fórmulas, (x) (G(x) $\rightarrow$ R(x)), que por definição é R(**G**).

g) De esquerda à direita: suponhamos (***F*** = ***G***) e R(x *qua* F). Por definição de F = G, temos (x) (F(x) $\leftrightarrow$ G(x)) e assim (x) (G(x) $\rightarrow$ F(x)). Por definição de R(x *qua* F), temos, além de R(x), (x) (F(x) $\rightarrow$ R(x)). Logo, de (x) (G(x) $\rightarrow$ F(x)) e (x) (F(x) $\rightarrow$ R(x)), temos (x) (G(x) $\rightarrow$ R(x)). Como temos R(x), então por definição temos R(x *qua* G). O mesmo argumento, supondo R (x *qua* F) completa a prova do bicondicional da esquerda à direita. Para a prova da direita à esquerda: supor que F $\neq$ G. Por **e)** temos $\neg$F(**G**) ou $\neg$G(**F**). Seja $\neg$G(**F**) (a prova para $\neg$F(**G**) é similar). Seja **a** $\in$ H = {x: F(x) $\wedge$ $\neg$G(x)}. Consideremos dois casos: $\neg$ (x)(G(x) $\rightarrow$ F(x)) e (x)(G(x) $\rightarrow$ F(x)). Se $\neg$(x)(G(x) $\rightarrow$ F(x)), **a** e F são tais que: F**a** e (x)(F(x) $\rightarrow$ F(x)), logo F(**a** *qua* F); mas $\neg$(x)(G(x) $\rightarrow$ F(x)), logo $\neg$F(**a** *qua* G). Se (x)(G(x) $\rightarrow$ F(x)), precisamos considerar três subcasos. 1º. subcaso: há **b**$\in$H tal que **b**$\neq$**a**; **a** e G$\cup${**a**} são tais que: **a**$\in$G$\cup${**a**} e G$\subseteq$G$\cup${**a**}, logo G$\cup${**a**}(**a** *qua* G); mas $\neg$F$\subseteq$G$\cup${**a**}, logo $\neg$G$\cup${**a**}(**a** *qua* F}. 2º. subcaso: H={**a**} e G$\neq\varnothing$; c$\in$G e G são tais que: c$\in$G e G$\subseteq$G, logo G(c *qua* G); mas $\neg$F$\subseteq$G, logo $\neg$G(c *qua* F). 3º. subcaso: H={**a**} e G=$\varnothing$, isto é, F=H; **d**$\in$[$\neg$F] e [$\neg$F] ([$\neg$F] está indicando o complemento absoluto de F) são tais que: **d**$\in$[$\neg$F] e G$\subseteq$[$\neg$F], logo [$\neg$F](**d** *qua* G); mas $\neg$F$\subseteq$[$\neg$F], logo $\neg$[$\neg$F](**d** *qua* F).

h) Seja **F** = **G** por hipótese. Logo, (x) (F(x) $\leftrightarrow$ G(x)). Desta última se segue (x) (G(x) $\rightarrow$ F(x)). Supondo R(**F**), então (x) (F(x) $\rightarrow$ R(x)). Logo, (x) (G(x) $\rightarrow$ R(x)), que por definição é R(**G**). Um argumento semelhante supondo R(**G**) para concluir R(**F**) completa a prova de esquerda para direita. Para provar de direita à esquerda, suponhamos (R) R(***F***) $\leftrightarrow$ R(***G***) e seja R = F. Logo, F(***F***) $\leftrightarrow$ F(***G***). Como, por **c)**, temos F(**F**), se segue F(**G**). Analogamente, com R = G, temos G(***F***) $\leftrightarrow$ G(***G***). De novo, por **c)**, G(**F**). Como temos F(**G**) e G(**F**), por **e**) temos **F** = **G**.

Aos Colaboradores

1. Somente artigos inéditos poderão ser aceitos para publicação. As colaborações devem ser dirigidas às editoras da revista: Irley F. Franco ou Kátia Muricy e enviadas para o seguinte endereço:

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – Departamento de Filosofia
Rua Marquês de São Vicente 225 1149L
Gávea – 22453-900 Rio de Janeiro RJ

2. Artigos em espanhol, francês, italiano e inglês serão aceitos.

3. Todos os artigos serão submetidos a pelo menos dois especialistas de sua área. Os pareceres poderão eventualmente ser consultados. Os nomes dos pareceristas não serão de forma alguma revelados aos autores dos artigos aceitos ou recusados. Os artigos recusados não serão devolvidos ao autor.

4. Uma vez aceitos para publicação, não será permitido aos autores acrescentar, diminuir, emendar, ou fazer qualquer tipo de alteração no texto, exceto no caso de haver sugestões por parte dos pareceristas.

5. A aceitação de um artigo não implica necessariamente em sua publicação no número seguinte ou em algum número determinado da revista. Sendo estritamente acadêmica, a revista [O que nos faz Pensar] não tem como critério de publicação a ordem cronológica em que recebe ou aprova os textos de seus colaboradores.

6. Os artigos devem ser mandados em CDROM, em qualquer versão do Winword, com três cópias impressas em espaço duplo, sem uso do verso do papel e, em princípio, devem constar de, no máximo 20 laudas (com 30 linhas e setenta batidas por linha). A editoria se reserva o direito de, excepcionalmente, aceitar trabalhos que excedam esse limite. Não deve constar no artigo nenhuma identificação do autor. Este deve acrescentar uma página com informações a seu respeito (nome, nome da instituição de origem, departamento a que pertence, endereço, telefone e e-mail) e uma solicitação de avaliação para publicação. Artigos submetidos simultaneamente a outras revistas não serão aceitos.

7. Artigos enviados por e-mail só serão aceitos em casos excepcionais.

8. Os textos encaminhados devem ser acompanhados de 5 palavras-chave e um abstract de até 15 linhas em inglês e em português.

9. Os autores devem procurar respeitar as normas de formatação de O que nos faz pensar, sobretudo no que diz respeito ao uso do negrito, que deve ser substituído por itálico, ao uso da CAIXA ALTA em nomes de autores, que em nossa formatação não é usada, e para indicar o travessão, o uso de um duplo traçado (--), caso não seja possível digitar o próprio travessão (—).