Wittgenstein e os Números

Wilson Mendonça[1]

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma reconstrução sistemática da crítica do segundo Wittgenstein ao programa logicista de fundamentação da matemática. As duas primeiras seções tratam da perspectiva de Wittgenstein na filosofia da matemática e de algumas distinções, feitas no *Tractatus*, que antecipam o que Wittgenstein dirá posteriormente nessa perspectiva. A explicação, empreendida por Russell, do sentido de proposições (equações) matemáticas em termos de tautologias no quadro da lógica formal e a definição do conceito de número por Frege e Russell são expostas na terceira seção e criticadas nas seções subseqüentes. Assim, ao contrário do que se assume comumente, a análise de Wittgenstein mostra que Frege e Russell não realizam uma « redução » do conceito de número ao conceito « mais fundamental » de correlação biunívoca (4); de acordo com isso, os números não são mais concebidos como propriedades reais de classes que poderiam ser obtidas por abstração, mas como formas ou possibilidades que determinam *a priori* a descrição do mundo da experiência (5); algumas considerações sobre o uso inevitável dos sistemas mais potentes de representação numérica, p. ex. a notação decimal, na derivação formal de proposições matemáticas envolvendo grandes números mostram, além disso, a autonomia essencial das técnicas matemáticas frente à técnica logística (6). O trabalho é encerrado com uma observação sobre o sentido que se pode dar, no quadro da filosofia de Wittgenstein, à expressão « os fundamentos da matemática ».

1 Departamento de Filosofia da PUC-Rio.

Abstract

The aim of the present paper is to present a systematic reconstruction of the later Wittgenstein's critique of the logicist program of establishing the foundations of mathematics. The first two sections deal with Wittgenstein's approach to the Tractatus *which anticipate Wittgenstein's later statements on the subject. Russell's attempt to explain the meaning of mathematical propositions (equations) in terms of tautologies within the framework of formal logic, and Frege and Russell's definition of the concept of number, are set forth in the third section and criticized in the subsequent sections. Thus, contrary to what is usually assumed, Wittgenstein's analysis shows that Frege and Russell do not « reduce » the concept of number to the « more fundamental » concept of one-to-one correlation (4); accordingly, numbers are no longer conceived as real properties of classes that might be arrived at by means of abstraction, but rather as forms or possibilities that determine a priori the description of the world of experience (5); further, some considerations about the representation — such as decimal notation — in the formal derivation of mathematical propositions involving large numbers show the essential autonomy of mathematical techniques in relation to the technique of logistic (6). The last section contains some observations about the meaning that might be given, within Wittgenstein's philosophy, to the phrase « the foundations of mathematics ».*

1. Um ponto de vista não matemático na filosofia da matemática

Entre os escritos de Wittgenstein, as *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (Wittgenstein [1956]) talvez sejam os que provocaram as críticas mais veementes. Mesmo filósofos que admiram ocasionalmente as *Investigações Filosóficas* (Wittgenstein [1953]) não dão, freqüentemente, valor especial às reflexões de Wittgenstein sobre a matemática. Os críticos (por exemplo, Anderson [1958], Bernays [1959], Dummett [1959], Kreisel [1959]) tampouco estão sempre de acordo com a filosofia de Wittgenstein tal como ela encontrou sua expressão nas *Investigações Filosóficas,* sobretudo com a filosofia dos conceitos psicológicos (« *philosophy of mind* ») contida aí. Eles parecem, porém, ser, por princípio, de opinião que os fundamentos da matemática (o « discurso sobre coisas matemáticas »), ao contrário, talvez, do « discurso sobre coisas mentais », formam um objeto filosófico que não se deixa analisar com os métodos de Wittgenstein.

Uma das razões para a rejeição tão forte da filosofia da matemática de Wittgenstein relaciona-se, seguramente, com o modo como ele concebe sua investigação dos fundamentos da matemática. Esta não deve ser, segundo o modo de ver de Wittgenstein, de natureza matemática : « Nela não se calcula; portanto, ela não é, por exemplo, logística. » (Wittgenstein [1953], p. 544). Não se trata de dar à matemática, através, por exemplo, de melhores demonstrações ou novos cálculos lógicos, um « fundamento mais seguro ». Wittgenstein volta-se, notoriamente, contra a idéia, introduzida pela lógica matemática, de que um cálculo lógico-matemático poderia fundamentar ou tornar segura a matemática. Assim, ele rejeita decisivamente as pretensões, levantadas no marco do programa hilbertiano de uma nova fundamentação da matemática, de « garantir a confiabilidade do aparato matemático » (Hilbert [1925], p. 89) e de « adquirir clareza total sobre os princípios da inferência na matemática » (Hilbert [1922], p. 16) através da aplicação do método axiomático, para restaurar, com isso, na matemática, « a antiga reputação da verdade inexpugnável » (p. 15). Para Wittgenstein [1969], é, ao contrário, certo que « tampouco a lógica é uma metamatemática, isto é, tampouco o trabalho com o cálculo lógico pode revelar verdades essenciais *sobre* a matemática » (p. 296). « Por isso, não ajuda coisa alguma na filosofia da matemática refundir provas em novas formas. » (Wittgenstein [1956], p. 302).

Nisso se manifesta uma oposição vigorosa à autocompreensão dos pesquisadores dos fundamentos. Que uma investigação no âmbito da « filosofia da mente » não deva ser *psicológica*, tornou-se mais ou menos plausível para nós[2]. Para os representantes dos mais diferentes pontos de vista na discussão sobre os fundamentos da matemática parece, contudo, óbvio que os problemas filosoficamente relevantes da matemática são também (e talvez somente) problemas *lógico-matemáticos*[3].

Essa tendência filosófica é apresentada por Wittgenstein como « a irrupção funesta da lógica na matemática » (Wittgenstein [1956], p. 281), através da qual teria chegado à filosofia uma pseudo-exatidão « que é a pior inimiga da verdadeira exatidão » (Wittgenstein [1969], p. 296). Para a tradição pós-fregeana da lógica matemática, a escolha deve ser feita entre a imprecisão e a inutilidade da linguagem cotidiana e filosófica, por um lado, e uma linguagem artificial, matematicamente controlável, por outro (*cf.* Russell [1903], p. 3 ss.). É *nesse* contexto que Wittgenstein fala da « maldição da irrupção da lógica matemática na matemática » (Wittgenstein [1956], p. 299) e da pseudo-exatidão que consiste em querer substituir a linguagem normal por um discurso regrado esquematicamente, como se fosse possível obter, dessa maneira, uma compreensão « mais rigorosa » da

2 Mas há também escrúpulos. É suficiente que nos lembremos de representantes da moderna psicologia cognitiva, de Jerry Fodor [1978], por exemplo, que afirma também contra Wittgenstein : « Devemos desistir de procurar análises; a psicologia é a única filosofia da mente que temos chance de alcançar » (p. 61).

3 Johann von Neumann [1931], por exemplo, já diz a propósito da questão da validade geral da matemática clássica : « Digno de nota é o fato de que essa questão, em e por si mesma filosófico-epistemológica, está se transformando numa questão lógico-matemática. Como resultado de três importantes desenvolvimentos no campo da lógica matemática [...], cada vez mais são questões matemáticas não-ambíguas, não questões de opinião [*matters of taste*], que estão sendo investigadas nos fundamentos da matemática » (p. 61).

matemática. Esse é um erro, aliás, que Wittgenstein atribui antes a Russell do que a Frege, A tradição iniciada com os *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead, que crê continuar o trabalho de Frege, se ocupa estranhamente, como Wittgenstein [1964] nota, « com uma linguagem 'ideal' [...] e não com a *nossa* » (p. 52). A filosofia da matemática passa a ser, então, ou a elaboração dos fundamentos lógico-matemáticos da matemática ou « mera opinião filosófica ».

Wittgenstein coloca-se contra esse desenvolvimento. Sua atitude na filosofia da matemática não se baseia, ao contrário do que seus críticos gostam de sugerir, no conhecimento insuficiente do conteúdo da lógica matemática e da matemática moderna. A relação entre a matemática e a pesquisa dos fundamentos é concebida na filosofia de Wittgenstein de tal modo que a tentativa de construir sistemas de regras, cada vez mais abrangentes, para os cálculos matemáticos e as derivações lógicas não é atacada *como tal*. Do ponto de vista de Wittgenstein, essa tentativa somente se torna problemática quando aqueles que a empreendem esquecem as determinações particulares (« locais ») que estão na base de todos os sistemas de regras construídos formalmente, passando então a oferecê-los como uma « nova fundamentação segura » da matemática.[4]

As considerações « gramaticais » de Wittgenstein almejam colocar *numa* ordem sinótica os fenômenos que se manifestam no aprendizado, na operação e na utilização das estruturas matemáticas. Contra a tendência, típica das teorias dos fundamentos, de reduzir a matemática a formalismos unitários (« eternos »), a ordem procurada por Wittgenstein deve levar-nos ao reconhecimento da matemática como « uma *mistura* **variegada** de técnicas de prova » (Wittgenstein [1956], p. 176), como « um fenômeno antropológico » (p. 399) também como uma dimensão histórica[5].

Um exemplo significativo dessa postura é a discussão wittgensteiniana da definição lógica do conceito de número, formulada, inicialmente, por Frege e retomada, depois, por Russell, bem como da explicação logicista do sentido de uma equação aritmética. As páginas seguintes ocupam-se pormenorizadamente com essa discussão.

4 Uma descrição precisa do modo como a filosofia da matemática de Wittgenstein se relaciona com a lógica matemática pode ser encontrada em Kambartel [1963] : « Para ele, é suspeita a pretensão da lógica matemática de dar, em seu sistema, às proposições e às provas matemáticas sua forma exata, que fixa e revela o sentido *próprio* das formulações verbais. [...] Importa-lhe considerar a matemática enquanto fenômeno, isto é, assim como o que é matemático realmente aparece, e enquanto um fenômeno *complexo*, diferenciado, e não reinterpretá-la e reduzi-la a outra coisa, a construções lógico-formais, por exemplo. Sob esse aspecto, a 'irrupção da lógica' aparece com 'maldição'. [...] Em vista do fenômeno 'matemática', nas conexões do 'como aprendemos', 'como fazemos', 'para que utilizamos', a fundamentação lógica da matemática torna-se coisa meramente imaginada, aparência. » (p. 185)

5 « Também há 500 anos pôde existir uma filosofia da matemática, do que era então a matemática. » (Wittgenstein [1956], p. 302)

2. Distinções lógicas e distinções de objetos segundo propriedades

Antes de tratar dos detalhes do programa logicista de uma fundamentação da matemática, e de sua crítica por Wittgenstein, é útil esclarecer o sentido de algumas distinções que Wittgenstein traçou na primeira fase de sua filosofia e desenvolveu na segunda.

Já no *Tractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein [1921]), o conceito de número — como, de resto, todos os « conceitos formais » é qualificado de « pseudoconceito » : sua expressão remete somente a um (ou ao) traço característico de todos os símbolos numéricos. No sistema do *Tractatus*, os conceitos formais são designados por variáveis, ao passo que os valores de uma variável designam os objetos que caem sob o respectivo conceito formal. A variável é *dada* com os seus valores. Ao contrário, a estipulação dos valores de uma variável implica a especificação *completa* das expressões « cuja característica comum é a variável » (3.317). Por isso, Wittgenstein afirma : « A estipulação dos valores é a variável. » (3.316). Porém, se os conceitos formais devem ser representados por variáveis e não, como queriam Frege e Russell, por funções ou classes (4.1272), e se uma variável já está dada com seus valores, então não podem ser introduzidos separadamente na linguagem lógica os objetos de um conceito formal *e* o próprio conceito formal. A expressão de um conceito formal é somente a forma comum dos símbolos que designam os objetos que caem sob esse conceito. Isso implica no nosso caso : « O conceito de número não é senão o comum a todos os números, a forma geral do número. O conceito de número é a variável número » (6.022).

Tanto na primeira como na segunda fase de sua atividade filosófica, Wittgenstein condena o uso indiscriminado de termos gerais lógicos (« *logische Begriffswörter* ») como termos gerais próprios (« *eigentliche Begriffswörter* »), porque isso produz a impressão de que é possível, também na lógica, classificar coisas segundo suas propriedades, com o que as proposições que articulam essa classificação aparecem como descrições reais, « substanciais ». Não há, porém, dois tipos de entidades, os objetos de um conceito formal, por um lado, e o próprio conceito formal, por outro, que se possam introduzir na lógica. O que se introduz é sempre um conteúdo e uma forma simultaneamente. Essa é a razão pela qual é impossível expressar, através de uma proposição « substancial », « que algo cai sob um conceito formal como seu objeto » (4.126). A tentativa de expressar isso conduz diretamente só a « pseudoproposições ». A suposta descrição dos objetos (lógicos) segundo suas propriedades « internas », isto é, lógicas, não é uma descrição real, porque — ao contrário das constelações de fatos empíricos, nas quais propriedades « externas », isto é, acidentais ou contingentes, são atribuídas a objetos (reais) — ela não é, falando estritamente, passível de negação. Para

Wittgenstein, isso relaciona-se com o fato de que a generalidade lógica não é acidental (6.031, 6.1232)[6].

Para a segunda filosofia de Wittgenstein, uma das fontes da confusão nos fundamentos da matemática é a mesma já identificada no *Tractatus*. Nas considerações teóricas sobre os fundamentos, distinções lógicas são freqüentemente apresentadas, na opinião do segundo Wittgenstein, como se se tratasse da distinção de objetos segundo propriedades reais, « como quando se distinguem maçãs vermelhas de verdes » (Wittgenstein [1969], p. 463 ss.). A proposição de Dedekind, por exemplo, segundo a qual uma classe infinita é aquela que pode ser correlacionada biunivocamente a uma subclasse real de si mesma, parece articular uma separação real, classificatória, no interior das classes. « Com isso, [Dedekind] indica, aparentemente, uma propriedade que a classe deve ter para cair sob o conceito 'classe infinita'. » (p. 464). De fato, porém, as classes infinitas, por um lado, e as finitas, por outro, pertencem a categorias lógicas diversas. Uma vez aprendido como se opera com classes infinitas, como se pode relacioná-las uma às outras, como se pode pô-las em correlação biunívoca etc., o conceito « classe infinita » está esgotado. E não se precisa mais fixá-lo através da definição « uma classe infinita pode ser correlacionada biunivocamente a uma de suas subclasses ». Tal determinação expressa somente uma relação « interna » entre um conceito formal e seus objetos. Ela é, para usar as palavras do Wittgenstein do *Tractatus*, uma « pseudoproposição » que, mal compreendida, faz com que a distinção lógica entre classes infinitas e finitas seja confundida com a distinção própria de objetos segundo propriedades (acidentais).

Essa confusão é atribuída por Wittgenstein também à teoria de Russell, o qual, como veremos mais exatamente, trata os números como propriedades de classes. Por não distinguir claramente propriedades « internas » de « externas » e usar termos gerais lógicos como se fossem termos gerais próprios, Russell chega à concepção da igualdade numérica como descrição substancial de uma relação entre os objetos chamados « classes ». A proposição matemática recebe com isso o « status » de uma proposição científico-natural. E a matemática é privada, na filosofia de Russell, da generalidade estrita.

Uma motivação central de Wittgenstein no *Tractatus* é exatamente a discussão crítica das teorias que não reconhecem « a posição singular » das proposições lógicas e matemáticas « entre todas as proposições » (Wittgenstein

6 Wittgenstein chega, nesse ponto, ao mesmo resultado de Kant, que também argumentava a favor da separação entre « a generalidade estrita » e a « comparativa » ou « meramente acidental ». Proposições gerais no sentido estrito são para Kant [1781] igualmente não passíveis de negação, ao passo que a generalidade empírica é « somente um aumento arbitrário da validade », a generalidade estrita torna um juízo necessário, « de forma que nenhuma exceção é admitida como possível » (p. B3). Como em Wittgenstein, a generalidade estrita pertence, em Kant, à essência da lógica e da matemática.

[1921], 6.112). O caráter geral dessa crítica é mantido na obra posterior[7]. Proposições matemáticas não exprimem, tanto na primeira como na segunda filosofia de Wittgenstein, propriedades « externas » de objetos. Positivamente, a análise « gramatical » do segundo período mostra que a matemática nos fornece um quadro no qual podemos descrever objetos empíricos, isto é, um quadro no qual podemos formar proposições (« reais ») que podem ser postas à prova no que diz respeito aos seus conteúdos de verdade : « A proposição matemática deve mostrar-nos o que faz *sentido* dizer. » (Wittgenstein [1956], p. 164). Com isso, porém, o valor *transcendental* que proposições lógicas e matemáticas já têm no sistema do *Tractatus* é ainda mais fortemente acentuado. Em conseqüência, proposições matemáticas são qualificadas não mais de « pseudoproposições », como ocorria no *Tractatus*, mas de proposições « gramaticais » ou regras para o uso de símbolos matemáticos em proposições significativas (não-matemáticas) :

> Poder-se-ia exprimi-lo de maneira rudimentar, dizendo que proposições matemáticas que contêm um símbolo determinado são regras para o uso desse símbolo; tais símbolos podem ser, então, utilizados em asserções não matemáticas. (Wittgenstein [1975], p. 37).

> Lembremo-nos de que somos persuadidos, na matemática, de proposições *gramaticais*; a expressão, o resultado dessa persuasão é, portanto, que *aceitamos uma regra.* (Wittgenstein [1956], p. 162).

3. A fundamentação logicista da aritmética elementar

Podemos, agora, voltar-nos para o programa do logicismo e sua crítica por Wittgenstein.

O programa de Frege e, depois, de Russell era o de mostrar que a matemática inteira deve ser reduzida à lógica simbólica. Russell parte da

7 A *Gramática Filosófica* (Wittgenstein [1969], p. 457) e as *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (Wittgenstein [1956], p. 68 ss.) confirmam o ensinamento do *Tractatus* (Wittgenstein [1921], 6.1261) segundo o qual na lógica, como na matemática, ao contrário das ciências experimentais, processo e resultado (ou descrição e objeto) são equivalentes. « O aritmético », como se diz nas *Observações Filosóficas* (Wittgenstein [1964], « não é a oportunidade de reunir 5 e 7, mas o processo e o que dele resulta » (p. 127). A operação aritmética não é um meio ou veículo que nos conduz a uma meta já existente. « Não se encontra, na matemática, um *caminho* que não seja uma meta. Não se pode dizer : eu já tinha todos esses resultados, procuro, agora, somente um caminho melhor que conduza a todos » (p. 183). A operação + 1 repetida três vezes, por exemplo, « gera e é o número 3 » (p. 148). Isso quer dizer que a matemática não é uma linguagem que *descreve* objetos (empíricos ou ideais) : « O que encontramos nos livros de matemática não é a *descrição de algo,* mas a coisa mesma. *Fazemos* a matemática. Assim como se diz : 'escrever história' e 'fazer história', só é possível, num certo sentido, fazer matemática » (Wittgenstein [1967a], p. 34; *cf.* Wittgenstein [1964], p. 186). Pois « a aritmética não fala de números, mas trabalha com números » (Wittgenstein [1964], p. 130).

idéia de que as proposições matemáticas podem ser expressas de acordo com a forma lógica básica « p implica q », onde p e q são funções proposicionais, isto é, fórmulas que contêm somente variáveis e constantes lógicas. A forma lógica geral de uma proposição matemática é, portanto, no sistema lógico de Russell, « $\varphi(x, y, z, ...)$ implica $\psi(x, y, z, ...)$ », ou em termos mais formais « $\varphi(x, y, z, ...) \supset \psi(x, y, z, ...)$ », onde $x, y, z, ...$ são variáveis e o símbolo $\supset$ representa a implicação formal. A substituição dessas variáveis por valores adequados (constantes) transforma as funções proposicionais em proposições reais, que são verdadeiras ou falsas de modo definido. A relação entre as funções proposicionais $\varphi(x, y, z, ...)$ e $\psi(x, y, z, ...)$, representada pelo símbolo $\supset$, deve, então, ser verdadeira para *todos* os valores permitidos das variáveis $x, y, z, ...$ Assim, à toda proposição matemática (verdadeira) corresponde, no sistema de Russell, uma proposição (meta)lógica da forma « $\varphi(x, y, z, ...) \supset \psi(x, y, z, ...)$ é uma tautologia ».

Com essa correspondência, Russell almeja mais do que uma mera tradução da matemática na linguagem da lógica simbólica. A utilização da lógica deve revelar o verdadeiro sentido das proposições matemáticas. Assim, Russell [1903] afirma que o verdadeiro sentido (« *true meaning* ») de uma proposição aritmética elementar como 1 + 1 = 2 é o da asserção de uma implicação formal entre duas funções proposicionais complexas, de modo que o lado esquerdo do símbolo de implicação contém uma conjunção lógica, ao passo que o lado direito é formado por uma proposição sobre uma soma lógica. O conjunto teria, portanto, a forma « $p \,.\, q \supset r$ ». E isso seria o que queremos dizer, na verdade, com « 1 + 1 = 2 » (pp. 6 e 135). Tais reconstruções, que serão consideradas de modo pormenorizado no que segue, são possíveis, segundo Russell, não somente para a aritmética elementar, mas também para a análise, as geometrias euclidianas e não-euclidianas, a dinâmica racional « e um número indefinido de outras disciplinas ainda não nascidas ou ainda em sua infância » (p. 5).

A realização integral do programa logicista de uma fundamentação da matemática é, de acordo com Russell [1919], somente « uma questão de detalhe » (« *a matter of detail* ») (p. 194). Para a compreensão da crítica wittgensteiniana a esse programa não é necessário, contudo, que consideremos os aspectos mais esotéricos e detalhados do sistema de Russell. De fato, Wittgenstein limita-se em sua crítica, por razões que ainda serão discutidas, à aritmética elementar dos números inteiros. Com base no exemplo da adição de números inteiros é possível mostrar, segundo Wittgenstein, o verdadeiro significado da teoria de Russell.

A adição, em todas as suas formas, é reduzida por Russell [1903] a duas operações elementares da lógica de classes : a soma lógica e o produto lógico de duas classes u e v. O produto lógico gera a classe cujos elementos são os elementos comuns às classes u e v, ao passo que o resultado da soma lógica é a classe que contém como elementos todos os elementos de u e todos os elementos de v. Uma das teses de Russell afirma que a adição de números inteiros pode ser definida exclusivamente sobre a base da soma lógica (p. 117). O procedimento definitório deve ser, ao mesmo tempo, uma fundamentação da aritmética : « O ponto importante a ser observado é que a adição lógica de classes é a noção fundamental, ao passo que a adição aritmética de números é completamente subseqüente » (p. 119). Tomando como ponto de partida a lógica de Peano, Russell mostra que operações da lógica de classes podem ser representadas e fundamentadas (derivadas) no cálculo proposicional. A soma lógica de suas classes, por exemplo, pode ser representada como a disjunção de duas funções proposicionais (p. 18 ss.). Russell utiliza esses resultados na transcrição de uma adição aritmética em seu sistema lógico-proposicional. Mediante definições lógicas e operações simbólicas formais, ele procura ascender da soma lógica de classes à adição aritmética de números inteiros. No sentido oposto, ele reduz a adição aritmética a uma implicação formal e, daí, a operações elementares com classes.

Se duas classes finitas e não vazias u e v não têm elementos comuns, isto é, se elas são disjuntas, então o número de elementos da soma lógica de u e v é, evidentemente, igual à adição aritmética do número de elementos de u com o número de elementos de v. Podemos assegurar-nos da validade dessa igualdade contando os elementos de u e de v por um lado, e os elementos da soma lógica de u e v, por outro. Todavia, esse procedimento, por se apoiar na contagem, pressupõe o conceito de número, que deveria antes, no sentido do logicismo, ser explicado. A definição não-circular da adição aritmética sobre a base da lógica de classes só é, portanto, possível sob a condição de que não se pressuponha nessa definição o que a expressão « número de elementos de uma classe » significa. Além disso, a contagem, como procedimento de verificação de igualdades numéricas, só é aplicável a conjuntos finitos e Russell quer abranger com sua definição também os conjuntos infinitos (Russell [1903], p. 114, Russell [1919], p. 17), o que torna o significado da expressão « número de elementos de uma classe » ainda mais obscuro.

Russell quer resolver esses problemas através do recurso à definição de número como classe de classes. Por enquanto, podemos simplesmente assumir que seja possível definir o conceito de número dessa maneira, isto é, sem circularidades. Nesse caso, podemos então considerar a igualdade, verificável sem contagem, entre o número de elementos da soma lógica de duas classes disjuntas u e v, por um lado, e a adição dos números de elementos das classes u e v, por outro, como uma justificação ou explicação definitória do que é propriamente a adição aritmética em sua forma mais elementar. ($\overline{u} + \overline{v} = \overline{\overline{u} \cup \overline{v}}$ é, no caso disjunto, a *definição* de adição. [$\overline{u}$ significa o número (cardinal) de u.]

Finalmente, se atentarmos para o fato de que classes podem ser dadas *extensionalmente,* mediante uma lista de seus elementos, mas também *intensionalmente,* através da especificação de uma propriedade definitória que faz com que alguns elementos sejam elementos de *uma* classe, então poderemos representar a adição aritmética de dois números inteiros, a soma 3 + 4 = 7, por exemplo, da seguinte maneira :

$$(\exists\, 3x)\, fx.\ (\exists\, 4x)\, gx.\ \sim (\exists\, x)\, fx.\, gx \supset (\exists\, 7x)\, fx \vee gx$$

Tal cadeia simbólica pode ser parafraseada assim : se uma classe u, definida pela propriedade f, tem três elementos; se uma classe v, definida pela propriedade g, tem quatro elementos; e se, além disso, as classes u e v não têm elementos comuns, então a soma lógica dessas classes tem exatamente sete elementos.[8]

A expressão $(\exists\, 3x)\, fx$ simboliza, de maneira muito simplificada, a circunstância de que a classe definida pela propriedade f tem três (e somente três) elementos. Ao invés de substituir essa expressão por uma mais adequada, podemos explicar o que significa dizer que uma classe tem um certo número de elementos. Uma classe u tem 2 elementos, por exemplo, se u, em primeiro lugar, tem elementos e se, sempre que x for um elemento de u, existir um elemento de u que é diferente de x; se, porém, x e y são elementos de u e se z é diferente de x e de y, então toda classe que contém z como elemento é diferente de u (Russell [1903], p. 135). Deve-se observar que o (conhecimento do) número 2 não é, aparentemente, pressuposto nessa explicação. E, evidentemente, ela pode ser estendida a classes com 3 ou mais elementos. Postos em forma simbólica, os resultados da aplicação desse procedimento podem ser incorporados à transcrição lógica da equação aritmética. Isso levaria à substituição da expressão $(\exists\, 3x)\, fx$ por uma expressão complicada do ponto de vista técnico. Tal complicação será evitada neste trabalho. Mantenhamos, entretanto, a explicação acima na lembrança e tratemos a expressão $(\exists\, 3x)\, fx$ como uma notação abreviada do fato de que a classe simbolizada dessa maneira tem 3 elementos. A expressão $(\exists\, 7x)\, fx \vee gx$ significa, nesse sistema notacional, que a soma lógica das classes definidas pelas propriedades f e g, respectivamente, tem 7 elementos. (Nesse ponto, Russell faz uso da possibilidade, já mencionada, de representar operações da lógica de classes na lógica proposicional.)

Se generalizarmos os resultados obtidos até agora, podemos dizer : à proposição $a + b = c$, onde a, b e c representam números inteiros, corresponde, no sistema de Russell, a asserção de que $(\exists\, ax)\, fx.\ (\exists\, bx)\, gx.\ \sim (\exists\, x)\, fx.\, gx \supset (\exists\, cx)\, fx \vee gx$ é uma tautologia.

A demonstração *dessa* asserção deve fazer referência exclusivamente a classes e operações com classes, sem pressupor, portanto, que já sabemos através da contagem e dos algoritmos aprendidos na escola primária o que são

8 A terceira função proposicional da esquerda para a direita exprime somente o fato de que as classes em questão são disjuntas. Se isso já estiver claro de algum outro modo — o que Wittgenstein freqüentemente supõe — a proposição 3 + 4 = 7 pode ser representada por : $(\exists\, 3x)\, fx.\ (\exists\, 4x)\, gx \supset (\exists\, 7x)\, fx \vee gx$. Às vezes, Wittgenstein escreve simplesmente $(\exists\, 3x).(\exists\, 4x) \supset (\exists\, 7x)$.

os números *a*, *b* e *c* e como eles estão relacionados entre si. *Sob a suposição* de que a definição do conceito de número proposta por Russell é realizável, a explicação logicista de uma adição aritmética não contém circularidade real, pois ela não trata primordialmente de números, mas de classes. Ela afirma, basicamente, que determinadas classes podem ser construídas a partir de outras classes segundo operações lógicas e que há relações entre essas classes que podem ser constatadas independentemente da contagem dos seus elementos. Nessa perspectiva, os números e suas relações são introduzidos *posteriormente*, através do recurso a essas relações formais, e atribuídos às classes como propriedades. Como Russell [1903] diz :

> A adição, como deveria ser observado cuidadosamente, não é, primordialmente, um método de formar números, mas de formar classes ou coleções (p. 135).
>
> A adição é, primordialmente, adição lógica, da qual, mais tarde, a adição aritmética é derivativa. A asserção de números depende do fato de que uma classe de muitos termos pode ser um objeto lógico sem que o seja aritmeticamente (p. 136).

O problema filosoficamente interessante nesse contexto é o de saber se podemos realmente ter um acesso puramente lógico aos números, isto é, um acesso *independente de nossa prática da contagem e da operação algorítmica com os números*. Pois só assim poderíamos incorporar à lógica a aritmética e, talvez, além dela, a matemática inteira. A definição logicista de número deve possibilitar esse acesso. Com sua ajuda, e sem o recurso à contagem e ao conhecimento prévio da aritmética, devemos poder constatar, entre outras coisas, que duas classes têm o mesmo número de elementos. Com isso poderíamos, enfim, provar que determinadas configurações simbólicas são tautológicas, obtendo, assim, esclarecimentos essenciais sobre a matemática.

Alguns traços centrais da definição logicista de número, concebida inicialmente por Frege e retomada, sem alterações substanciais, por Russell podem ser pressupostos, aqui, como conhecidos. Frege procura determinar o conceito geral de número através da explicação do sentido da equação « o número que cabe ao conceito F é o mesmo que cabe ao conceito G ». Como se trata de obter, em primeiro lugar, o conceito de número, a expressão « o número que cabe ao conceito ... » deve desaparecer na explicação da equação mencionada. Para isso, Frege [1884] introduz o conceito de « eqüinumerosidade » (« *Gleichzahligkeit* »), de tal maneira que o significado da expressão « eqüinumérico » (« *gleichzahlig* ») não deve ser deduzido de sua composição etimológica, pois isso pressuporia, evidentemente, o conceito de número, mas da seguinte definição :

> A expressão « o conceito F é eqüinumérico ao conceito G » é sinônima da expressão « existe uma relação φ que correlaciona unívoca e recipro-

camente os objetos que caem sob o conceito F aos objetos que caem sob o conceitoG» (p.85).

Com base nisso, Frege [1884] define o número que cabe ao conceito F como « a extensão do conceito 'eqüinumérico ao conceito F' » (*idem*).

O uso lingüístico de Russell difere do de Frege. Russell [1903] considera os números como propriedades de classes (p. 113), como princípios de repartição de classes. Isto é : o número é um ponto de vista *possível* sob o qual classes podem ser separadas e reunidas. Como Russell [1919] diz, « uma forma de reunir certas coleções, a saber, aquelas que têm um certo número de termos » (p. 14). Assim como a asserção de que um certo objeto é vermelho coloca-o na classe dos objetos vermelhos, a especificação numérica diria, essencialmente, que uma classe pertence a um certo conglomerado de classes, o conglomerado das classes cuja propriedade comum é o mesmo número de elementos. Assim, sob esse ponto de vista, todos os pares pertencem a um conglomerado, os trios pertencem a outro conglomerado etc. Duas classes pertencem ao mesmo conglomerado se existir entre elas uma relação que as correlacione biunivocamente, isto é, se as classes puderem ser relacionadas de modo que a cada elemento da primeira classe corresponda exatamente um elemento da segunda, e a cada elemento da segunda corresponda exatamente um elemento da primeira. Classes que se relacionam dessa maneira são chamadas por Russell de « similares ». O número cardinal de uma classe *u* é definido, então, como a classe de todas as classes que são similares à classe *u*. O número 2, por exemplo, é, de acordo com essa definição, a classe de todos os pares; o número 3, a classe de todos os trios etc. (Russell [1903], p. 115 ss.; Russell [1919], p. 18).

Frege e Russell procuram mostrar a plausibilidade desse procedimento definitório mediante alguns exemplos elementares. Se um garçom — eis o exemplo de Frege [1884] — quiser ter certeza de que coloca sobre a mesa o mesmo número de pratos e facas, não precisa contar esses objetos, mas simplesmente colocar ao lado de cada prato uma faca, isto é, estabelecer uma relação biunívoca entre os pratos e as facas (p. 81 ss.). De modo semelhante, Russell pergunta sobre as condições em que dizemos que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos. Sua resposta é : quando eles podem ser postos em correspondência biunívoca. A alternativa do « senso comum », a contagem dos elementos, não é, para Russell, uma alternativa real, pois contar os elementos de um conjunto é o mesmo que estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto que se deseja contar e um subconjunto dos símbolos numéricos « 1, 2, 3, ... ». Como Russell [1919] diz : « A noção de similaridade está pressuposta logicamente na operação da contagem » (p. 17).

Portanto, de acordo com Frege e Russell, não precisamos ou devemos recorrer, « por trás » da relação de similaridade, a um conhecimento « mais básico » dos números e da contagem. Com a constatação da similaridade, no sentido técnico de correlação biunívoca, já estaria descrito tudo o que deveria ser descrito nesse contexto. A correlação biunívoca parece ser, assim, em Frege e em Russell, o *único critério logicamente adequado para a igualdade numérica*. Ela forneceria, em outras palavras, o instrumento lógico mediante o qual deve tornar-se possível a concepção de uma determinação puramente lógica do conceito de número e de uma dedução formal da matemática a partir da lógica simbólica.

4. Correlação lógica e correlação empírica

Wittgenstein [1975] coloca em ação sua crítica exatamente no ponto em que Frege e Russell usam a correlação biunívoca como critério da igualdade numérica. Aí começam, segundo seu modo de ver, os problemas que fazem da definição logicista de número « uma história terrivelmente complicada », « um verdadeiro pântano » (p. 187). Frege e Russell tentaram comprimir casos heterogêneos do uso da expressão « numericamente igual » num único esquema. A igualdade numérica de dois conjuntos com muito poucos elementos, por exemplo, pode ser constatada simplesmente com uma olhada. Chega-se a uma decisão, nesse caso, imediatamente, sem contagem ou correlação. O arranjo dos elementos de acordo com um padrão facilmente apreensível também é um critério da igualdade numérica. Reconhecemos nos dois conjuntos o mesmo padrão e, assim, sua igualdade numérica (Wittgenstein [1969], p. 353 ss.; Wittgenstein [1975], p. 189). Evidentemente, a correlação biunívoca, como Frege a elucida no exemplo do garçom, isto é, a correlação feita realmente mediante o traçado de linhas, a ligação com fios, a ordenação espacial etc., é também um método efetivo para a *descoberta da igualdade numérica*. Exatamente isso torna a *correlação real* imprestável para a *definição do conceito de igualdade numérica*, pois ela pode mostrar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos, mas somente porque os conjuntos são, anteriormente a toda correlação, numericamente iguais.

O teor da definição logicista de número, sobretudo em Frege, traz consigo uma dificuldade real. Frege diz que um conceito F é « eqüinumérico » a um outro conceito G quando *existe* uma relação unívoca e recíproca entre os objetos que caem sob esses conceitos. É impossível que ele queira dizer com isso que a igualdade numérica passe a existir somente com o estabelecimento real da correlação. A ligação criterial entre o conceito de igualdade numérica (« eqüinumerosidade ») e a correlação real representaria, em primeiro lugar, uma forma insustentável de verificacionismo na filosofia da matemática. Em segundo lugar, seria uma tolice exigir sempre uma correlação real entre conjuntos numericamente iguais. Em muitos casos importantes, os conjuntos não se deixam correlacionar desse modo, mas têm ou podem ter, apesar disso, o mesmo número de elementos. Se a realização da correlação real (efetiva) for impossível por alguma razão contingente, a asserção de que os conjuntos são numericamente iguais *ainda faz sentido*, desde que a igualdade numérica possa ser constatada através de *outros* critérios (Wittgenstein [1975], p. 190). Assim, a afirmação de que o garçom do exemplo de Frege pode correlacionar pratos e facas não quer dizer que a igualdade numérica existe somente após a utilização do método da correlação biunívoca. A *possibilidade* de correlacionar facas e pratos não depende, evidentemente, dos esforços do garçom, mas precisa « existir previamente ». Através de seu esforço, a igualdade numérica pode ser constatada, porque os pratos e as facas estão lá *em número certo*. Pode-se conceder que a correlação (realizada *corretamente*) é, em determinadas circunstâncias, uma condição *suficiente* da igualdade numérica, um meio com o qual se pode mostrar que os conjuntos *são* numericamente iguais. De maneira alguma ela é uma condição *necessária*. Isso implica, porém, que a igualdade numérica (a « eqüinumerosidade ») possibilita a correlação, ao invés de ser determinada, em primeiro lugar, por ela (Wittgenstein [1967a], p. 164 ss.)

Com a expressão « existe uma correlação », tal como ela ocorre em sua definição, Frege precisa ter em mente não uma correlação real, mas uma *correlação possível*. De fato, ele diz, noutra passagem, que dois conceitos são « eqüinuméricos » quando « existe a possibilidade de correlacionar biunivocamente os objetos que caem sob os conceitos (Frege [1884], p. 79). Russell [1903] afirma também : duas classes são similares se seus elementos *podem* ser correlacionados biunivocamente (p. 113). Que podemos fazer alguma coisa nesse caso, que é possível fazer algo, não significa, porém, que tentamos e, provavelmente, conseguimos fazê-lo. A possibilidade de que se trata nesse caso é, obviamente, *lógica*, não-empírica. O garçom *pode* distribuir corretamente os pratos e as facas *porque há, de ambas as coisas, o mesmo número de peças*. A possibilidade da correlação é, portanto, a igualdade numérica dos conjuntos, que deve ser determinada antes da realização da correlação efetiva e que é utilizada como critério da correção dessa realização. (A pergunta sobre como isso ocorre vai ocupar-nos brevemente.)

Ao distinguir entre possibilidade lógica e possibilidade empírica ou real, Wittgenstein inverte, de certo modo, a tentativa fregeana e russelliana de definir o conceito de número. Embora a correlação real possibilite a constatação de que os conjuntos têm o mesmo número de elementos, a igualdade numérica assim obtida não pode ser utilizada para definir o conceito de número, pois pressupõe o número. O conceito de número não está assentado sobre o conceito da correlação biunívoca, mas, ao contrário, o número, a igualdade dos números, é a condição logicamente inalienável da correlação.

Como se reconhece, porém, a possibilidade da correlação ? Como não podemos abandoná-la à experiência, à realização de correlações reais, a possibilidade da correlação deve ser determinada antes da experiência, *na* matemática. A maneira normal de reconhecer se dois conjuntos são numericamente iguais, isto é, se existe, numa situação dada, a possibilidade da correlação, consiste em contar os conjuntos em questão. Algumas operações matemáticas como adição, multiplicação etc., em conexão com o agrupamento dos elementos em subconjuntos adequados, podem ser úteis em tais circunstâncias. Essas operações reduzem-se, porém, de uma maneira ou de outra, à contagem : elas podem ser vistas como modos matemáticos de contar. Por outro lado, a contagem, como Russell afirma, não é senão o estabelecimento de uma correlação biunívoca entre a classe, cujos elementos devem ser contados, e a seqüência (a classe ordenada) dos símbolos numéricos « naturais ». Parece, portanto, que não podemos evitar o recurso a correlações (reais) e que temos de tornar compreensível o conceito de número unicamente sobre a base de correlações. Assim, a ligação, estabelecida por Frege e Russell, entre a igualdade numérica e a correlação biunívoca permaneceria, apesar do que foi dito a propósito da possibilidade lógica da correlação, intacta. A distinção entre a correlação real e sua possibilidade lógica parece somente adiar, não resolver o problema.

Pode-se conceder que os métodos matemáticos de constatação da igualdade numérica, de contagem *na* matemática, são também « métodos de correlação ». A questão importante é verificar se a tentativa logicista de explicitação do número sobre a base da correlação não ameaça apagar as fronteiras que separam as constatações matemáticas dos fatos de experiência, eliminando, assim, a divisão entre lógica e *empiria*. São então comparáveis (no sentido relevante nesse contexto) os métodos de correlação *na* matemática e os métodos reais com os quais o garçom relaciona pratos e facas ? Há, na matemática, somente uma maneira de correlacionar, de contar ? Como é que se conta ou correlaciona, afinal, na matemática ? E como podemos distinguir esses métodos dos métodos reais de correlação ?

À primeira vista, a circunstância de que os conjuntos a serem contados têm muitos ou poucos elementos parece ser matematicamente irrelevante. Porém, como é possível decidir se, por exemplo, duas seqüências muito longas de traços verticais são numericamente iguais ou não ? Ainda que sua realização seja a mais cuidadosa possível, a correlação através do traçado de linhas de ligação entre os elementos das duas seqüências não pode ser, nesse caso, o critério da igualdade numérica. É provável, se formos muito cuidadosos, que não façamos um erro ao tentar pôr, dessa maneira, as duas seqüências em correspondência biunívoca. Que se possa dizer dessas seqüências que elas *são* numericamente iguais, e não somente que elas *parecem ser* iguais, não é, contudo, uma questão de probabilidade. O que constitui a igualdade numérica das seqüências nesse caso não é « a igualdade aproximada da configuração » (« *Gestalt* »), mas o fato de que elas têm, de fato, o mesmo número de traços, o que devemos constatar através da utilização de *outros* critérios, de *outras* maneiras de contar (Wittgenstein [1969], p. 331). E aqui há, conforme o caso, várias alternativas que podem conduzir-nos a um resultado seguro, diferentes técnicas com as quais podemos contar (nos dois sentidos !) na matemática. O que está na origem dessas técnicas é sempre a *tradução* dos signos formados pelos traços em *outros* signos, os quais permitem distinções que *não* podem ser feitas sem essa tradução (p. 330). Quem insistir, porém, no velho procedimento, deixando de recorrer às técnicas adequadas de tradução e traçando linhas de ligação entre as duas seqüências muito longas *não estará contando*. Este estará fazendo antes uma experiência (psicológica), ao passo que aquele que se orienta pelos procedimentos matemáticos adequados ao caso, procurando, por exemplo, explorar certas propriedades do sistema decimal, realiza um *cálculo*, uma *operação aritmética*. Se o primeiro correlacionou *corretamente*, isso se mostra quando o resultado obtido por ele for comparado com o que a contagem (a correlação matemática) revela. Pois só então decidimos se os conjuntos em questão *podem* ser postos em correspondência um-a-um.

Como se sabe, Russell quer cobrir com sua definição não somente conjuntos muito numerosos, mas também conjuntos infinitos. Todavia, o que significa correlacionar biunivocamente o conjunto dos números naturais, por exemplo, e o conjunto dos números pares é algo que só podemos explicar *dentro* da matemática. Nesse caso, não existe uma correspondência « na realidade » e não podemos apoiar-nos numa compreensão « pré-matemática » do que significa a expressão « correlação biunívoca ». Se tentarmos, por exemplo, à maneira do garçom do exemplo fregeano, escrever a série dos números naturais sobre a série dos números pares, de modo a poder ligar os termos correspondentes com linhas verticais, isto é, de modo a correlacionar « na intuição sensível » os dois conjuntos, obteremos somente um par de classes finitas correlacionadas entre si. Não podemos correlacionar efetivamente « todos » os números naturais, por um lado, e « todos » os pares, por outro. Se registrarmos, agora, três pontos ou a palavra « etc. » à direita desse par de classes (finitas) e dissermos que conjuntos *infinitos* podem, como se vê, ser postos em correlação biunívoca, então não estaremos mais usando a expressão « correlação » como ela foi introduzida no exemplo fregeano do garçom que distribui facas e pratos ou no exemplo russelliano dos maridos e das mulheres (Russell [1903], p. 113), ainda que haja semelhanças entre os dois modos de uso. A palavra « etc. » ou os três pontos não podem ser considerados, nesse caso, como uma mera abreviação, como se não pudéssemos escrever o resto das classes em questão somente por falta de tempo ou escassez de papel e tinta. Na seqüência « *a, b, c* etc. », a expressão « etc. » está no lugar do resto do alfabeto, representa abreviadamente um certo número de letras e pode ser eliminada pela transcrição dessas letras. Ao contrário, o « etc. » da seqüência « *1, 2, 3* etc. » é, por assim dizer, uma parte integrante da seqüência e não pode, nem mesmo « em princípio », ser eliminado. Isso não tem coisa alguma a ver com a finitude humana. Afirmar que não podemos escrever « todos » os números cardinais é completamente dessemelhante à asserção de que não podemos escrever um milhão de números inteiros em 10 minutos. Isso não conseguimos *de fato*, ao passo que a primeira afirmação quer dizer que *não faz sentido* tentar escrever « todos » os números cardinais. Sem a semântica do « etc. » não há número ou cardinalidade de conjuntos infinitos. A questão sobre o que significa dizer que existe ou pode existir uma correlação biunívoca entre tais conjuntos deve ser, antes de mais nada, esclarecida conceitualmente. Uma correlação baseia-se, nesse caso, numa indução matemática, relacionando-se essencialmente às leis de formação dos conjuntos em questão. Os conjuntos são então definidos não mais por propriedades, como a definição logicista requer, mas pelas leis de formação. Por isso, a palavra « correlação » — e com ela também expressões como « classe » ou « número » — designa, no contexto das classes infinitas, algo diferente do que designa no contexto das classes finitas. « Faz-se algo de novo e *chama-se* a isso 'correlação biunívoca', e depois chama-se algo completamente novo 'ter o mesmo número'. » (Wittgenstein [1975], p. 194.)

Se considerarmos tais exemplos, deixados de lado por Frege e Russell na explicação do conceito de número, mas que podem ser multiplicados, a definição de número cardinal como classe das classes que podem ser correlacionadas entre si mostra-se não tanto errada, como vazia. Ela refere-se, como vimos, não a correlações reais, mas à possibilidade da correlação. Seu sentido depende, portanto, dos critérios com que reconhecemos a possibilidade da correlação. Contudo, a definição logicista de número deixa completamente indeterminados os procedimentos segundo os quais a *correlação na matemática* é estabelecida e a igualdade numérica (enquanto possibilidade da correlação real) é constatada. Ela gera a impressão de que só existe *um* modo de correlacionar classes, de que qualquer um já sabe o que é correlação, sendo indiferente se ela deve ser estabelecida na matemática ou fora dela, na « vida real ». Porém, « a *correlação* na vida real (mediante linhas de ligação, posição etc.) está para a correlação na matemática assim como a *ligação* na vida real está para a ligação geométrica por meio de uma reta ». (Wittgenstein [1975], p. 190.)

Uma informação precisa sobre as convenções que subjazem à correlação na matemática, por exemplo no caso de conjuntos muito grandes ou no caso de conjuntos infinitos, não nos é fornecida pela definição de Frege e Russell. Poder-se-ia mesmo mostrar que alguns problemas surgidos no plano mais elevado dos grandes conjuntos emergem também no plano mais baixo dos pequenos conjuntos. De fato, lidamos, na matemática, com diferentes técnicas de correlação que se complementam mutuamente, estabelecendo, de maneiras variadas, os padrões da possibilidade lógica, com os quais podemos, então, julgar a correção das realizações tentativas de correlação real. Cada técnica, como Wittgenstein [1975] diz, é « um novo modo [...] de considerar as coisas » (p. 194). Ela determina, em cada situação, o que deve ser visto como numericamente igual, e, na verdade, *antes* de qualquer correlação real. A definição logicista não nos esclarece mais sobre os números, porque não elucida as determinações particulares que servem de base aos diferentes modos de uso da expressão « correlação », sobretudo no âmbito da matemática.

Em outras palavras : a idéia de correlação é introduzida por Frege e Russell no sentido de um controle empírico da igualdade numérica, para a qual eles fornecem exemplos intuitivos. Posteriormente, a definição proposta faz (implicitamente) referência não mais à correlação real, mas somente à possibilidade lógica de correlacionar classes, sem que se diga *como* a correlação deve ser, então, efetuada e controlada. A definição logicista não realiza, assim, uma « redução » do conceito de número ao conceito « mais básico » de correlação biunívoca. Ela fala somente *em geral* sobre igualdade numérica e correlação, sem distinguir de modo preciso entre correlação real e lógica. Desta, há, porém, não somente uma forma, mas muitas, que precisamos explicar sempre « localmente » (*em particular*), de tal maneira que precisamos fazer referência a nossas técnicas matemáticas da constatação da igualdade numérica e, com isso, aos diferentes traços essenciais do conceito de número.

Resumindo, podemos ver, agora, como a não consideração da distinção entre correlação lógica e empírica opera na explicação logicista do conceito de número. Ela faz, em primeiro lugar, com que a proposição « duas classes numericamente iguais *podem* ser postas em correlação biunívoca » seja transformada na proposição bem distinta « *existe* uma correlação biunívoca entre classes numericamente iguais ». Como a asserção « se duas classes são correlacionadas biunivocamente, então são numericamente iguais » não pressupõe o (conhecimento do) número, passa-se a crer que a asserção « duas classes são numericamente iguais quando podem ser correlacionadas biunivocamente » tampouco pressupõe o número. Desse modo, pretende-se justificar a idéia de que os procedimentos logicistas podem submeter nossa práxis operativa com os números a um padrão rigoroso, ao invés de se deixarem controlar por ela. Como Wittgenstein [1969] diz nesse contexto : « Aqui, o carro foi atrelado na frente dos bois » (p. 355).

5. Número e forma

Todavia, nem tudo está errado na explicação do conceito de número por Frege e Russell. Wittgenstein acentua muitas vezes, em suas *Preleções sobre os Fundamentos da Matemática* (Wittgenstein [1975], que Frege e Russell deram, com sua definição, « um passo extremamente difícil que, uma vez, tinha de ser dado » (p. 200). A concepção da especificação numérica como uma asserção sobre um conceito, segundo a qual o número não é atribuído às coisas, mas cabe propriamente a um conceito, torna clara a relação entre número e propriedade de um conceito. Com isso, « a gramática fica muito mais clara e determinados mal-entendidos tornam-se impossíveis ». E « isso é, enquanto utilizável, um esclarecimento muito amplo » (p. 319).

Aqui, porém, é preciso distinguir exatamente entre o conceito, no sentido de uma propriedade delimitadora que determina uma extensão e a própria extensão do conceito. A especificação numérica contém uma asserção sobre uma classe somente nos casos em que esta é concebida *intensionalmente*, isto é, como um *conceito*. Ela pode ser, então, a expressão de um *conhecimento empírico*, pode ser significativamente afirmada. Por outro lado, o número não é uma propriedade empírica de uma extensão, compreendida como uma classe dada extensionalmente. Nesse caso, o número e a classe não estão numa *relação contingente*, que se poderia considerar como objeto de uma afirmação significativa. A especificação numérica, enquanto for compreendida como uma asserção sobre uma classe, « não se relaciona a uma extensão, isto é, a uma lista que pode ser a extensão de um conceito » (Wittgenstein [1969], p. 332). Portanto, a extensão não pode ser aquilo a que se atribui o número como uma propriedade. A partir daqui, é possível ver por que, na lógica de Russell, ao contrário da opinião de Russell, uma classe *não é descrita*, quando se lhe atribui, de acordo com a definição logicista, um número cardinal.

Se, *em primeiro lugar*, a classe for dada intensionalmente, então a definição do número como classe das classes que podem ser mapeadas univocamente sobre ela ainda não nos dá uma resposta à pergunta « quantos elementos tem a classe em questão ? » Da definição segue-se somente que todas as classes « similares » a essa determinada classe têm o mesmo número de elementos. Contudo, com essa informação ainda não é conhecido o número de elementos. « *A especificação do número é a especificação do quanto e não a especificação da igualdade numérica.* » (Wittgenstein [1967a], p. 222.) Além disso, é um assunto empírico, filosoficamente irrelevante, constatar, através de correlações reais, se dois conjuntos descritos intensionalmente são ou não numericamente iguais. « Não são as extensões das propriedades que deveriam interessar-nos, mas *o que torna possível descrevê-las* » (p. 222). Assim, sob o recurso à concepção intensional das classes, a lógica de Russell não consegue fixar o significado dos numerais. Por isso, Wittgenstein diz com razão : « Se Russell abrir o jogo, deve entender por correlação algo que é dado através de uma *lista* » (p. 165).

Se, porém, *em segundo lugar*, classes forem dadas extensionalmente, então é tautológica ou contraditória a afirmação de que elas são numericamente iguais, pois toda classe descrita dessa maneira já contém « uma imagem do número » (Wittgenstein [1967a], p. 222), que se encontra numa relação interna com a classe e possibilita a correlação real. A negação da proposição de que duas listas são numericamente iguais nunca é meramente falsa. Se tomarmos isso em consideração, podemos perceber que a proposição de que duas classes dadas extensionalmente podem ser univocamente correlacionadas não descreve pura e simplesmente as classes em questão. Tal proposição é « superdeterminada » na medida em que, com a especificação das extensões, a possibilidade da correlação entre elas já está dada. Não se pode (ou deve) mais afirmar essa possibilidade. Na linguagem do *Tractatus* : não se pode dizer, isto é, afirmar significativamente, que classes determinadas extensionalmente são numericamente iguais. De forma análoga, Wittgenstein [1964] registra também na segunda fase de sua filosofia : « Dizer a propósito de uma extensão que ela tem tal e tal número é absurdo, pois o número é uma propriedade *interna* da extensão » (p. 141).

A propósito do conceito (da « intensão ») pode-se, portanto, asserir o número, também mediante uma correlação real. Sobre essa base, porém, não se pode pretender (re)construir o significado dos signos numéricos, a não ser que se aceite uma forma muito estreita do verificacionismo semântico, a favor do qual nada parece falar. Relativamente às extensões, a tentativa de definir o conceito de número mediante uma correlação é prepóstera, pois com as extensões já está dada a possibilidade da correlação (a igualdade dos números). Sobre isso, diz Wittgenstein [1967a] : « Em caso algum significa um proveito querer fundamentar o número sobre a correlação » (p. 165).

Como essas passagens sugerem, encontramos, nesse ponto, a distinção, já introduzida no *Tractatus*, entre conceitos formais e conceitos próprios, ou entre propriedades internas e externas. Ao passo que podemos dizer, com a correlação real, algo sobre conjuntos dados intensionalmente, a saber : que eles são ou não são numericamente iguais; a possibilidade *lógica* da correlação não pode ser expressa por uma proposição (« real »), porque ela é « uma relação *interna* das extensões conceituais », « dada somente através da igualdade dos números » (Wittgenstein [1964], p. 140). « O número », como se lê noutra passagem, « é a propriedade externa de um conceito e a propriedade interna de sua extensão (da lista dos objetos que caem sob ele). O número é o esquema de uma extensão. » (Wittgenstein [1969], p. 332.)

Com isso, Wittgenstein continua sua crítica, iniciada no *Tractatus*, à tentativa, empreendida por Frege e Russell, de obter o conceito de número através de um princípio de abstração. Wittgenstein insiste, depois como antes, no fato de que o número não é uma propriedade real de uma classe, de que não fazemos, com a especificação numérica, uma distinção no universo das classes. O conceito de número é, antes, uma forma (um conceito formal) que se mostra no uso dos signos numéricos. Ele é uma variável que « não está para o número assim como o conceito de maçã está para uma maçã (ou o conceito de espada para Nothung). » (Wittgenstein [1969], p. 285.) A definição logicista de um número qualquer precisa utilizar um simbolismo que tem a mesma multiplicidade do que ela deveria definir. « Mas, então, o decisivo é essa multiplicidade e não a definição. » (Wittgenstein [1967a], p. 223.) Em outras palavras : o número é um traço essencial pressuposto na construção do simbolismo e que lhe dá, em cada caso, a multiplicidade necessária para a expressão de relações numéricas. Como uma forma, ele se mostra *no* simbolismo, como algo que não pode ser definido, pois « é absurdo querer definir *aquilo* sobre o qual repousa a possibilidade de toda comunicação e compreensão » (p. 224). E isso distingue o conceito de número dos conceitos próprios.[9]

É verdade que desaparece, nas *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* (Wittgenstein [1956]), toda referência terminológica explícita a conceitos formais e conceitos próprios. Contudo, o essencial dessa distinção é mantido.[10] Assim, em conexão com o « experimento » em que 100 esferas são agrupadas e reagrupadas, de forma perspícua, em dez filas de dez esferas cada, Wittgenstein [1956] chama a atenção para o fato de que o matematicamente essencial nesse processo, no qual são demonstradas certas peculiaridades das 100 esferas, são as « propriedades internas », não « externas » das fileiras de esferas (p. 69). Na medida em que o « experimento » é desenvolvido de tal modo que dele resulta uma imagem que pode ser gravada facilmente, mostram-se as propriedades do número 100, em contraste, por exemplo, com as propriedades do material. « O que desenvolvo, pode-se dizer, é o *papel* que « 100 » desempenha no nosso sistema de cálculo » (p. 68). O experimento, ou melhor, a imagem do experimento pode, então, servir-nos como prova, na qual não as esferas materiais, mas « as *próprias formas* » (p. 54) são reagrupadas. Gravamos (inculcamos) essas formas que posteriormente usamos para lidar com processos reais, isto é, para descrevê-los. « Os números são formas [*Gestalten*] (não quero dizer os símbolos numéricos) e a aritmética nos informa sobre as propriedades dessas formas [*Gestalten*]. [...] As formas, porém, desempenham o papel de imagens que se usam dessa e daquela maneira » (p. 229 ss.). As proposições matemáticas, com as quais captamos as propriedades dos números, colocam, portanto, à nossa disposição *possibilidades* de exposição da realidade; elas devem « fornecer somente a estrutura para uma descrição » (p. 356).

O número aparece, nessas considerações, como uma *forma da realidade* num sentido verdadeiramente kantiano. Ele é « a possibilidade do quanto », assim como o espaço é « a possibilidade do onde » e o tempo « a possibilidade do

9 Wittgenstein [1967a] resume sua crítica com o seguinte comentário : « Na base de toda a lógica de Frege e Russell está a confusão de conceito e forma. Os números são conceitos. Não se chega a eles através de generalização. Frege e Russell procuraram a essência do número numa direção errada. Eles acreditavam que o número três é o resultado de uma espécie de generalização de três cadeiras, três ameixas, etc. E assim, para expressar o característico dessa generalização, eles inventaram o princípio da abstração. O número três não é o que é geral nos trios. O número três surge tão pouco através de generalização a partir dos trios individuais, como a forma de uma imagem surge através de generalização a partir das imagens individuais. O número 3 é a forma comum dos trios, mas não sua propriedade comum. A forma 3 pode ser somente transportada, mas não definida » (p. 224 ss.).

10 Esse é o caso também na chamada fase intermediária da filosofia de Wittgenstein. Nas *Observações Filosóficas* (Wittgenstein [1964]) lê-se, por exemplo : « Os números são imagens das extensões conceituais » (p. 124). « Os números são o que caracterizo na minha linguagem através dos esquemas numéricos. Isto é, tomo (por assim dizer) os esquemas numéricos da linguagem como o que me é conhecido e digo : os números são o que esses esquemas representam » (p. 129). « Os números são uma forma dada na realidade através das coisas [...] » (p. 133).

quando » (Wittgenstein [1967a], p. 214). Trata-se, em todos esses casos, não de propriedades da realidade, que poderíamos obter através de uma abstração, mas justamente de possibilidades transcendentais, que não podem ser reduzidas a aspectos da realidade, porque determinam *a priori* sua descrição. Contra Russell [1919], por exemplo, que acredita que a matemática e a lógica se ocupam do mundo real (« *real world* ») tão verdadeiramente como a zoologia, embora somente das propriedades mais gerais e abstratas do mundo (p. 169), contra toda concepção filosófica que não separa nitidamente as proposições matemáticas das constatações empíricas, « substanciais », a crítica de Wittgenstein coloca a matemática numa perspectiva claramente transcendental. A matemática fornece-nos, nessa perspectiva, esquemas, imagens, paradigmas ou formas, mediante os quais consideramos o mundo, com os quais julgamos processos reais. Ela cria as *formas*, determina, « em primeiro lugar, o *caráter* do que você chama de 'fato' » (Wittgenstein [1956], p. 381). Ela « deve [...] determinar o que são fatos empíricos » (p. 383).

6. Fundamentação e uso da aritmética

Voltemos, agora, à interpretação russelliana da equação aritmética elementar. Como vimos, o verdadeiro sentido de uma equação como $3 + 4 = 7$ deve ser captado, na lógica de Russell, pela expressão $(\exists\ 3x)\ fx.\ (\exists\ 4x)\ gx.\ {\sim}\ (\exists\ x)\ fx.gx \supset (\exists\ 7x)\ fx \vee gx$. Essa transcrição da proposição aritmética deve trazer à tona o fato de que a adição de números inteiros é, em seu sentido profundo, a soma lógica de duas classes. A demonstração de que tal cadeia simbólica expressa uma tautologia equivale à justificação ou fundamentação definitiva da proposição de que $3 + 4 = 7$.

A demonstração em questão é feita mediante o estabelecimento de uma correlação biunívoca entre a soma lógica das classes disjuntas u (com três elementos) e v (com quatro elementos), por um lado, e uma classe com sete elementos, por outro. Se representarmos os elementos das classes envolvidas por letras minúsculas e a correlação por linhas horizontais ligando os elementos correspondentes, a demonstração tem o seguinte aspecto :

$$\begin{array}{c|c|l} & u \left\{\begin{array}{l} a \text{ — } a\\ b \text{ — } b\\ c \text{ — } c\end{array}\right. & \\ \begin{array}{c} a \cup v \\ \left[\begin{array}{c}\text{soma lógica}\\ \text{de } u \text{ e } v\end{array}\right]\end{array} & v \left\{\begin{array}{l} a \text{ — } d\\ b \text{ — } e\\ c \text{ — } f\\ d \text{ — } g\end{array}\right. & \begin{array}{l}\text{classe com}\\ \text{7 elementos}\end{array}\end{array}$$

Poderíamos, também, diferenciar os elementos das diversas classes através de sinais gráficos adequados, tratar os sinais como representantes das classes e incorporar tudo na transcrição não-abreviada da proposição aritmética que queremos fundamentar. A correlação seria feita, nesse caso, à medida que se corta um elemento do parêntese à direita do símbolo de implicação para cada elemento do primeiro parêntese da esquerda para a direita e, quando estivermos prontos com esse parêntese, do segundo parêntese, até que não sobre mais elemento algum. Para fins práticos, isso é, sem dúvida, enfadonho; porém, para o desvelamento do verdadeiro sentido da aritmética e para a compreensão de nossa prática operativa com os números, isso é, na opinião de Russell, de grande significado.

Wittgenstein [1964] diz, nesse contexto, que poderíamos estar em dúvida sobre o modo como deve ser obtido o numeral do parêntese direito da transcrição lógica da equação aritmética, *caso* ainda não soubéssemos « que ele surgiu através da adição dos numerais dos dois primeiros parênteses » (p. 126). Segundo sua opinião, isso mostra que a fórmula lógica não representa a equação aritmética num plano mais profundo, mas é somente mais uma aplicação da aritmética. Essa observação não é completamente correta. É verdade, como Bernays [1959] nota em seu comentário sobre Wittgenstein, que precisamos realizar, na demonstração logicista de uma equação elementar, « a mesma verificação comparativa [...] tal como ela sucede na contagem habitual ». A fundamentação logicista requer « exatamente as comparações que são utilizadas no cálculo elementar » (p. 13). Contudo, ao menos para a adição de pequenos números, a lógica de Russell coloca a nosso dispor um procedimento que poderíamos, aparentemente, aprender e utilizar com sucesso, sem que tenhamos de ser, antes, exercitados na aritmética habitual. Dispomos, portanto, nesse caso, de uma técnica de prova que, como os exemplos mostrados acima devem ter deixado claro, pode existir « ao lado » ou « antes » da aritmética como algo mais ou menos independente de sua aplicação. Nesse sentido, « Russell ensina-nos [...] *uma* maneira de somar » (Wittgenstein [1956], p. 145). E seu método para provar que determinadas configurações simbólicas expressam tautologias prescreve uma « maneira de colacionar » que, além de não ser arbitrária (p. 148), pode mostrar-nos como chegamos, por exemplo, ao 5 a partir do 2 e do 3 (p. 146).

Para a apreciação da questão de saber se a lógica de Russell, com essa técnica, somente « pendurou [algumas] franjas » (Wittgenstein [1956], p. 146) no cálculo aritmético ou se ela é capaz de alcançar mais do que isso, é importante perguntar como ela pode ser estendida além do âmbito da adição de pequenos números. Pois se for possível mostrar que ninguém poderia ter uma idéia de « como esse cálculo russelliano deve ser estendido, a não ser que a aritmética habitual já lhe tenha entrado no sangue » (Wittgenstein [1975], p. 191), então é suspeita, ou mesmo simplesmente incorreta, a afirmação de que Russell « conseguiu realizar uma inserção da aritmética e sobretudo das proposições numéricas na logística » (Bernays [1959], p. 13).

Estranhamente, os filósofos da matemática não se ocupam, em regra, em suas avaliações da lógica matemática, com essa pergunta. Porém, quando Carnap [1928], por exemplo, afirma que Russell e Whitehead « provaram com todo o rigor a derivação das disciplinas matemáticas a partir da logística » (p. 15), ou quando Bernays [1959] exprime a convicção de que é possível « formular e *provar* proposições aritméticas em termos puramente lógicos » (p. 13; ênfase minha), isso ocorre sob a suposição (implícita) de que o método logicista de Russell, útil, inicialmente para a realização de demonstrações muito elementares[11], pode ser generalizado sem o recurso às técnicas aritméticas costumeiras. Certamente, reconhece-se que provas logicistas « com todo o rigor » de muitas proposições matemáticas ainda no âmbito da aritmética « podem, talvez, preencher algumas centenas ou até mesmo milhares de páginas ». Mas nisso vê-se somente uma dificuldade prática que não traz prejuízo algum ao significado teórico da logística.[12] Isso não é senão a expressão da idéia segundo a qual poderíamos, uma vez equipados com o aparato da logística, fazer nosso caminho pela aritmética de modo puramente teórico, sem precisar esperar que ela « entrasse no nosso sangue », para usar, mais uma vez, as palavras de Wittgenstein.[13]

11 Os exemplos de Russell em *The Principles of Mathematics* (Russell [1903]) são 1 + 1 = 2 e 2 + 2 = 4. E mesmo as demonstrações desses exemplos são realizadas aí de maneira algo simplificada !

12 É assim em Hempel [1945], por exemplo, numa exposição filosófica do sistema de definições logicistas : « A definição de um dos conceitos mais complexos da matemática em termos dos quatro primitivos mencionados acima pode preencher centenas ou mesmo milhares de páginas; mas, evidentemente, isso não afeta de maneira alguma a importância teórica do resultado que acabamos de obter; isso mostra, contudo, a grande conveniência e a indispensabilidade prática para a matemática de ter disponível um amplo sistema de conceitos definidos altamente complexos » (p. 388).

13 Nesse contexto, Benacerraf [1965] imagina crianças que, filhos de lógicos militantes, começam sua educação matemática com a lógica, ou melhor, com a teoria dos conjuntos, ao invés de serem exercitados, como sucede com crianças « normais », na aritmética. Para essas crianças « anormais », a ordem pedagógica seria também, na opinião de Benacerraf, a ordem epistemológica. Somente depois de poder lidar seguramente com demonstrações e provas na teoria dos conjuntos, eles aprenderiam algo sobre os números e suas relações. Porém, isso poderia ser arranjado, ainda segundo Benacerraf, sem maiores problemas, mediante definições meramente verbais, de forma que nada de novo seria introduzido : « Os pais de nossas crianças imaginárias precisariam somente indicar que aspecto ou que parte do que as crianças já conheciam, sob outros nomes, é o que as pessoas chamam 'números'. Aprender os números envolveria aprender novos nomes para conjuntos familiares. Antigas verdades (da teoria dos conjuntos) adquiririam uma nova roupagem (da teoria dos números) » (p. 273). As crianças de Benacerraf aprenderiam, assim, com meios exclusivamente da teoria dos conjuntos, a identificar as classes que as pessoas « normais » chamam de « números (naturais) ». Além disso, elas aprenderiam que existe uma relação com respeito à qual essas classes podem ser ordenadas como uma progressão. Desse modo, elas adquiriram o conceito do número 0 e o de sucessor e poderiam, então, *demonstrar* os axiomas de Peano. Certamente, para poder conversar com pessoas « normais », elas precisariam saber o que os outros querem dizer com « adição », « multiplicação » etc. Mas também aqui se mostraria sua « superioridade epistemológica ». Pois essas operações seriam, para elas, « *explicitamente* definíveis », o que traz consigo a vantagem de que elas poderiam controlar com certeza « que operações da teoria dos conjuntos são, em realidade, a adição, a multiplicação e assim por diante ». *Somente no*

O verdadeiro sentido da observação wittgensteiniana já mencionada, segundo a qual a interpretação logicista da equação aritmética é somente mais uma aplicação da aritmética, vem à tona se orientarmos as considerações por *outros* exemplos, diferentes daqueles com os quais se procura, normalmente, tornar plausível a idéia da inserção total da matemática na logística.

A objeção de Wittgenstein frente às tentativas lógico-formais de fundamentação da matemática *não* é a de que não se poderia provar, no sistema de Russell, que 3 + 4 = 7, mas « que não se pode constatar dessa maneira que 1000 + 1000 = 2000 » (Wittgenstein [1956], p. 148), ou que 3 bilhões + 4 bilhões = 7 bilhões (Wittgenstein [1975], p. 346). « Russell não prova nem mesmo que 10 x 100 = 1000 » (p. 191). Uma prova russelliana para operações com pequenos números está em ordem porque o método da correlação biunívoca é, nesse caso, suficientemente perspícuo para que possamos ser convencidos do caráter tautológico da transcrição lógica correspondente. Como se pode, porém, correlacionar classes quando se trata de grandes números ? Como podemos controlar que não cometemos erros na realização da correlação ? Aqui fica claro que precisamos de *outra* técnica, diferente da de Russell, se quisermos provar que 3 bilhões + 4 bilhões = 7 bilhões. Quem quiser pode traduzir essa igualdade na linguagem da logística. Mas a aritmética habitual serve, nisso, de padrão para o que devemos escrever em termos da lógica simbólica. Na medida em que fazemos referência a determinadas propriedades da notação decimal e mostramos que o resultado dessa operação depende somente dos primeiros algarismos, tornamos perspícua a construção russelliana e « só então » produzimos, com isso, « uma prova, onde ela antes não existia » (Wittgenstein [1956], p. 143). « Mas então a proposição [aritmética] não repousa mais sobre a prova de Russell » (p. 153). As coisas são, antes, ao contrário. O recurso à notação

fim dessa educação « imaginária », as crianças seriam confrontadas com o que para nós é o começo : o uso dos números na contagem e na medição. Contudo, elas seriam introduzidas nessas atividades não *de modo prático*, mas, ainda uma vez, através de explicações teóricas descritivas (p. 273 ss.) Benacerraf não vê dificuldade conceitual alguma nesse *Gedankenexperiment*. Na verdade, ele observa, no fim de seu ensaio, que uma tal educação, por fazer com que os números apareçam como objetos autônomos definidos, não é filosoficamente recomendável. Mas « de um ponto de vista matemático », ela estaria em ordem. Não há, para Benacerraf, diferenças significativas entre o que é ensinado a essas crianças e o que nós, mortais ordinários, sabemos (p. 294). Essa ficção — e aí reside sua importância — traz à tona um componente essencial do programa logicista que permanece não-questionado em avaliações do seu desempenho. Crispin Wright [1980] formula a questão de uma maneira clara : « A tese a ser defendida é a de que o tipo de verdade exemplificado pela lógica e a aritmética é o mesmo, e que isso deve ser mostrado pela demonstração de que o nosso modo de reconhecimento dessas verdades não é essencialmente diferente : as verdades aritméticas podem sempre ser reconhecidas por meios puramente lógicos. [...] é, por assim dizer, parte do caráter objetivo da lógica e da matemática estarem relacionadas de tal modo que exista, em princípio, um caminho que vai da lógica a '7034174 + 6594321 = 13628495', o qual somos incapazes de seguir por razões puramente externas » (p. 133). As objeções *não-convencionais* de Wittgenstein ao logicismo, como Wright nota corretamente, procuram mostrar que essa tese é fundamentalmente errada, ou, em outras palavras, que *não podemos* formar conceitos aritméticos dessa maneira.

decimal que nos é familiar prova algo sobre a « prova » russelliana. A logística não nos diz mais, nesse caso, o que devemos obter na matemática, ao passo que a aritmética deve dizer-nos o que podemos fazer na lógica.

A técnica mediante a qual executamos tarefas do tipo exemplificado acima não pode ser evitada pela lógica de Russell. Se obtivéssemos um determinado resultado para uma adição e se um outro resultado fosse produzido no sistema de Russell, confiaríamos, certamente, na nossa técnica aritmética já exercitada e não na de Russell. Estaríamos convencidos, através do recurso à aritmética convencional, de que *devemos* ter errado ao fazer a correlação na demonstração logicista. Nossa técnica não é, portanto, posta a prova pela logística. Faz parte do que chamamos « adição » que 3 bilhões + 4 bilhões = 7 bilhões, indiferentemente do que se possa « provar » a esse respeito na logística. Isso quer dizer, porém, que a tentativa de reduzir a adição aritmética a operações da lógica de classes é condenada ao fracasso, pois ela não pode evitar o uso da aritmética, o operar, exercitado em comum, dentro do sistema decimal. Aqui vale : « O *uso* do cálculo tem de cuidar de si mesmo. » (Wittgenstein [1956], p. 146.)

Russell queria mostrar que se trata propriamente, no caso da proposição matemática, da afirmação de uma implicação, de uma proposição condicional « se – então ». Inferimos corretamente, quando executamos uma operação aritmética (uma « conta »), porque a matemática é, fundamentalmente, lógica. É verdade que fazemos uma inferência correta quando afirmamos que há, no total, 7 bilhões, quando há 3 bilhões num lado e 4 bilhões no outro, mas *não* porque a tradução logicista da proposição « 3 bilhões + 4 bilhões = 7 bilhões » exprima uma tautologia. Wittgenstein inverte o raciocínio nesse contexto : sabemos que lidamos, no caso da transcrição logicista, com uma tautologia, porque inferimos, da maneira familiar, 7 bilhões a partir de 3 bilhões e 4 bilhões (Wittgenstein [1975], p. 346). Isso quer dizer : mesmo o significado da expressão « tautologia » não é fixado (exclusivamente) na lógica formal.

Os exemplos de operações com grandes números mostram, portanto, que a decisão sobre a correção ou não da fundamentação logicista de uma proposição matemática pressupõe o cálculo costumeiro. « Se alguém quisesse realmente provar a adição de dois número grandes com o cálculo de Russell, então já teria de saber como se soma, conta etc. » (Wittgenstein [1975], p. 192). A lógica de Russell nos fornece na verdade uma técnica de adição que corre, por um certo trecho, paralelamente à nossa velha técnica. Contudo, tão logo as diferentes técnicas entrem em conflito, decidimo-nos pela velha técnica e corrigimos, de acordo com ela, os resultados da lógica matemática. Wittgenstein [1956] resume :

> Não é a lógica — eu gostaria de dizer — que me obriga a reconhecer uma proposição da forma $(\exists)(\exists) \supset (\exists)$ quando há um milhão de variáveis em cada um dos dois primeiros parênteses e, no terceiro, dois milhões. Quero dizer : a lógica não me obrigaria nesse caso a reconhecer proposição alguma. *Outra* coisa me obriga a reconhecer uma tal proposição como de acordo com a lógica (p. 155).

O que nos « obriga » nesse caso é, evidentemente, a técnica, exercitada em comum, da adição no sistema decimal. Essa, porém, não nos é ensinada pela lógica de Russell. Na verdade, é costume supor nesse contexto que a técnica do sistema decimal é somente uma extensão inocente do cálculo lógico com traços I, II, III, ..., que, com esse cálculo, já estaria dado tudo ou, pelo menos, o essencial. Hilbert [1925], por exemplo, introduz « o símbolo 2 para a abreviação do símbolo numérico II, o símbolo 3 para a abreviação do símbolo numérico III » etc. De acordo com isso, o símbolo complexo 2 + 3 = 5 deve « servir à comunicação do fato » de que 2 + 3 e 5 « são, considerando as abreviações utilizadas, o mesmo símbolo numérico, a saber o símbolo numérico IIIII » (p. 90). Mas em que medida é o símbolo 75836, por exemplo, uma *mera abreviação* da seqüência de traços correspondente ? É correto pensar que tudo o que podemos fazer « abreviadamente » com um símbolo como 75836 poderia ser feito também com a seqüência de traços que lhe corresponde ? « Pode-se deduzir a técnica do sistema decimal a partir daquela do sistema I, I + I, (I + I) + I etc. ? » (Wittgenstein [1956], p. 149.) Evidentemente, devemos ter, nessas circunstâncias, cautela com a tendência generalizada de « ver o procedimento abreviado como uma sombra pálida do não-abreviado », pois o primeiro nos ensina « o que *deve* aparecer como resultado no não-abreviado. (Em vez de ser ao contrário.) » (p. 157). As chamadas abreviações são uma parte inevitável do cálculo matemático; elas colocam à nossa disposição novos meios para a geração de expressões « que, sem sua ajuda, não poderiam ser geradas » (p. 144). Os « fatos » que « comunicamos » com símbolos como 75836 dão entrada no mundo matemático somente com a introdução da notação que possibilita sua expressão. Eles têm, também, um outro valor para nós que o « fatos correspondentes » que podemos comunicar na notação não-abreviada I, I + I, (I + I) + I etc.[14]

Essas considerações relacionam-se com a observação, sempre repetida por Wittgenstein, de que uma prova não é um experimento. Contra a tendência de desqualificar os aspectos pragmáticos da demonstração matemática como « mera pragmática » ou como algo que pertence, talvez, à psicologia, mas não à lógica, Wittgenstein [1956] enfatiza : « Uma prova deve não somente mostrar que é assim, mas que tem de ser assim » (p. 149). Nesse sentido faz uma grande diferença (não meramente « prática ») se uma prova ocupa somente uma página ou mil páginas. Não se trata mais, no último caso, de uma prova. Se uma tal construção morosa puder ser abreviada mediante a introdução de uma notação adequada, de modo que o resultado possa convencer-nos e ser objetivamente utilizado como padrão de justificação de nossas operações, em

14 « Meu ponto de vista distingue-se do das pessoas que escrevem, hoje, sobre os fundamentos da aritmética, devido à circunstância de que não preciso desprezar um determinado cálculo, por exemplo, o do sistema decimal. Um é para mim tão bom quanto o outro. » (Wittgenstein [1969], p. 334).

outros contextos, com os símbolos nela contidos, então a abreviação é não somente uma comodidade prática, mas o próprio meio da prova.

Os símbolos do sistema decimal não são, assim, introduzidos por mera comodidade. As únicas provas para adições envolvendo grandes números são aquelas que podem ser realizadas na escrita abreviada. O erro da idéia muito difundida, de que a introdução do procedimento abreviado não traz consigo algo de essencialmente novo é conseqüência do fato de que as diferentes técnicas de prova são desacopladas, nas considerações teóricas sobre a matemática, dos seus contextos pragmáticos. A atenção é dirigida não ao uso variado, preferindo-se falar, ao invés disso, de maneira muito geral sobre os nossos métodos :

> Estendemos nossas idéias sobre as operações com pequenos números àquelas com grandes números, de modo semelhante a como imaginamos que, se a distância daqui ao sol *pudesse* ser medida com a régua, resultaria exatamente o mesmo que obtemos, hoje, de maneira completamente diferente. Isto é, estamos propensos a tomar a medição de comprimento com a régua como modelo também para a medição da distância entre duas estrelas.
>
> E é dito, por exemplo, na escola : « Se imaginarmos réguas colocadas daqui até o sol ... » e com isso parece ter sido dada a explicação sobre o que entendemos pela distância entre a terra e o sol. E o uso de uma tal imagem está completamente em ordem, enquanto estiver claro que podemos medir a distância entre nós e o sol, e que não podemos medi-la com réguas. (Wittgenstein [1956], p. 146 ss.)

A matemática revela-se, quando não abandonamos « o território da utilidade » (Wittgenstein [1956], p. 211), como uma conexão de técnicas de prova engrenadas, mas não totalmente redutíveis umas às outras, técnicas que não precisam e não podem ser justificadas pela lógica formal. Wittgenstein reconhece que a logística nos fornece uma técnica *adicional* que, em determinados âmbitos, pode realizar bons serviços. Importa-lhe, porém, sobretudo, tornar claro que as pretensões de *explicação* levantadas com freqüência nesse contexto são mal colocadas. As técnicas usuais de prova não podem ser substituídas e muito menos explicadas pela de Russell. « Como se pode *explicar* uma técnica de prova por uma outra ? Como pode uma delas explicar a *essência* da outra ? » (Wittgenstein [1956], p. 175). A técnica russelliana, supostamente esclarecedora, pode entrar em conflito, como vimos, com o uso da aritmética, supostamente necessitado de uma explicação. Como se decide uma situação dessas ? « Quem diz, quando eles não estão de acordo, qual é o método de cálculo verdadeiro, o que está na fonte da matemática ? (p. 158). O que quer dizer « supor » que tenhamos, talvez, errado sempre na multiplicação 12 x 12 = 144 ? Corrigiríamos, em vista de um resultado divergente no sistema de Russell, o nosso cálculo usual, ou diríamos : « claro, claro, o cálculo está errado — mas é assim que eu calculo » (p. 91) ? Não pode ocorrer, na logística, a refutação ou a descoberta de que 12 x 12 = 144. Essa proposição matemática é a expressão da regra de multiplicação. « Isso é o que fazemos quando executamos o processo que se chama 'multiplicação', 144 é o que designamos, aqui, de 'o resultado correto'. » (Wittgenstein [1975], p. 114.) Por isso, a logística não nos dá um critério super-seguro para a correção de nossas operações reais com números. « Essa é a nossa técnica — assim *fixamos* a nossa técnica e a ensinamos » (p. 97).

Dispomos, na verdade, de uma prática estabelecida, assegurada e extensível da adição, multiplicação etc. É uma ilusão pensar que ela precisa, ainda, ser fundamentada logicamente. As avaliações filosóficas da logística recorrem, em regra, unicamente a exemplos com referência aos quais o discurso sobre a derivação da matemática a partir da lógica formal parece muito plausível. Tão logo outros exemplos (não-incomuns, senão também triviais) são levados em consideração, mostra-se o ponto fraco dessa posição : « Inicialmente, as provas longas acompanham as curtas e como que as tutelam. Mas, finalmente, elas não podem mais seguir as curtas e estas mostram a sua autonomia. » (Wittgenstein [1956], p. 176). Cativados por uma imagem a cujo uso exato não prestamos atenção, somos impedidos de julgar os fatos imparcialmente. As observações de Wittgenstein sobre a adição de grandes números devem ser vistas como uma tentativa de libertar-nos do preconceito que nos leva a pensar que os fatos *têm de* corresponder a essa imagem capciosa : « a consideração das provas lógicas *longas*, não-perspícuas, é somente um meio para mostrar como essa técnica [...] pode ir a pique e outras técnicas se tornam necessárias » (p. 176).

É, portanto, um erro apresentar a matemática como se o resto ainda não-coberto efetivamente pelas construções lógico-formais fosse algo que há de se arranjar no futuro. Com isso, a filosofia da matemática « adia a introdução de novas técnicas, — até que se passa finalmente a acreditar que ela não é mais necessária » (Wittgenstein [1956], p. 179). Nessa perspectiva estreita crê-se poder reduzir a multiplicidade total das técnicas matemáticas de prova a *um* sistema unitário, explicá-la através de *uma* técnica. A práxis matemática variada deixar-se-ia, de acordo com isso, contornar teoricamente, formalmente. Essa concepção, partilhada, aliás, na filosofia da matemática, não somente por representantes do logicismo, mas também por formalistas, provoca a réplica amarga, porém, como vimos, justa de Wittgenstein [1956] : « O pernicioso da técnica lógica é que ela nos faz esquecer a técnica matemática especial » (p. 281).

Frente a filósofos que gostariam de colocar uma teoria lógico-formal sob o uso da matemática. Wittgenstein [1956] relembra constantemente : « *Descrever*, não explicar, é o que queremos ! » (p. 205). « Nossa tarefa não é inventar novos cálculos, mas descrever o estado *atual* » (p. 210). Cálculos lógicos, como os desenvolvidos por Russell e seus seguidores, são, no melhor dos casos, somente meios auxiliares adicionais na matemática. Comparados com o uso real da matemática, que deveriam fundamentar, esses cálculos se revelam como « por um lado, muito estreitos, por outro, muito amplos — muito gerais e muito especiais » (p. 146). Se, ao invés de querer reduzir a matemática a essas construções lógicas, descrevermos « a geografia, *como ela é agora* » (p. 302) e evitarmos com cautela as descrições enganadoras « que nos vêm imediatamente à cabeça » (p. 216), então há de ficar claro : ao invés de esperar que a lógica simbólica possa dar-lhe uma base segura, o uso da matemática tem de cuidar de si mesmo. As explicações profundas, as tentativas de fundamentação não são necessárias. « Ensine-a a nós e você a terá fundamentado. » (Wittgenstein [1969], p. 297.)

7. Observação final

No contexto de uma de suas primeiras discussões da teoria dos números de Russell, Wittgenstein [1964] afirma : « O conteúdo de 5 + 7 = 12 é (se alguém não soubesse) exatamente aquilo que traz dificuldades às crianças quando elas aprendem essa proposição na aula de aritmética » (p. 126). Após uma crítica de princípio às pressuposições implícitas na tentativa de representar o sentido de proposições matemáticas em termos da teoria dos conjuntos, Wittgenstein [1967b] pode somente ironizar : « Para compreender o cálculo da escola primária, as crianças devem ser filósofos de valor; na falta disso, eles precisam exercício » (§ 703). O reconhecimento dessa inevitabilidade, por princípio, do exercício, da introdução a uma práxis comum, faz com que a matemática, tal como ela é praticada na escola básica, apareça a Wittgenstein [1967a] mais rigorosa e precisa do que as tentativas de fundamentação orientadas pela teoria dos conjuntos (p. 106). Em geral, Wittgenstein parece considerar a influência da teoria dos conjuntos na nossa reflexão sobre a matemática como o sintoma de uma « doença » profundamente enraizada que põe em perigo a nossa cultura matemática (Cf. von Wright [1978], p. 208).

Pode ser — como Wittgenstein [1967a] pensa — que a matemática reassuma sua verdadeira face, que ela tem na escola básica, « quando a disputa dos fundamentos estiver encerrada » (p. 105 ss.), de modo que, uma vez « curados », passemos a procurar os « verdadeiros fundamentos » da matemática não mais nas teorias lógico-formais de Russell e seus seguidores, mas, por exemplo, na própria dimensão pedagógica da matemática. E no entanto, a discussão dessas teorias não é irrelevante para a obtenção de uma compreensão *reflexiva* dos números e de suas relações. O característico do « exercício filosófico » nesse âmbito parece ser, antes, o fato de que só podemos formar um juízo correto na passagem por teorias e pontos de vista que reconhecemos, no fim, como equivocados. Mas, como disse, somente no fim.

Bibliografia

Anderson, Alan Ross [1958] « Mathematics and the 'Language Game' ». *The Review of Metaphysics*, 11 (1958), 446-458.

Benacerraf, Paul [1965] « What Numbers Could Not Be ». *Philosophical Review*, 74 (1965), 47-73. Referências de acordo com a reimpressão em Benacerraf e Putnam [1983], 272-294.

Benacerraf, Paul e Putnam, Hilary [1964] *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1964.

[1983] *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*. Second edition. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1983.

Bernays,Paul [1959] « Betrachtungen zu Ludwig. Wittgensteins 'Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik' ». *Ratio*, 1 (1959), 1-8.

Block, Ned [1981] *Readings in Philosophy of Psychology*. Volume 2. London, Methuen, 1981.

Carnap, Rudolf [1928] *Der logische Aufbau der Welt*. Hamburg, Felix Meiner, 1961.

Dummett, Michael [1959] « Wittgenstein's Philosophy of Mathematics ». *Philosophical Review*, 68 (1959), 324-348.

Fodor, Jerry [1978] « Propositional Attitudes ». *The Monist*, 61 (1978), 501-523. Referências de acordo com a reimpressão em Block [1981], 45-63.

Frege, Gottlob [1884] *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. (reprodução fotográfica) Hildesheim, Georg Olm, 1977.

Hempel, Carl G. [1945] « On the Nature of Mathematical Truth ». *The American Mathematical Monthly*, 52 (1945). Referências de acordo com a reimpressão em Benacerraf e Putnam [1983], 377-393.

Hilbert, David [1922] « Neubegründung der Mathematik ». *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), 157-177. Referências de acordo com a reimpressão em Hilbert [1964], 12-32.

[1925] « Über das Unendliche ». *Mathematische Annalen*, 95 (1925), 161-190. Referências de acordo com a reimpressão em Hilbert [1964], 79-108.

[1964] *Hilbertiana. Fünf Aufsätze*. Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964.

Kambartel, Friedrich [1963] « Philosophische Perspektiven der Diskussion um die Grundlagen der Mathematik ». *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 45 (1963), 157-193.

Kant, Immanuel [1781] *Kritik der reinen Vernunft*. Ed. R. Schmidt. Hamburg, Felix Meiner, 1956.

Kreisel, Georg [1959] « Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics ». *The British Journal for the Philosophy of Science*, 9 (1959), 135-158.

Russell, Bertrand [1903] *The Principles of Mathematics*. Second edition. London, Allen and Unwin, 1937.

[1919] *Introduction to Mathematical Philosophy*. London : Allen and Unwin, 1919.

von Neumann, Johann [1931] « The Formalist Foundations of Mathematics ». *In* Benacerraf e Putnam [1983], 61-65.

von Wright, Georg Henrik [1978] « Wittgenstein in Relation to His Time ». *In* von Wright [1982], 201-216.

[1982] *Wittgenstein*, Oxford : Basil Blackwell, 1982.

Wittgenstein, Ludwig [1921] *Tractatus logico-philosophicus. Schriften 1.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1980.
[1953] *Philosophische Untersuchungen, Schriften 2.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1980.
[1956] *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Schriften 6.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1974.
[1964] *Philosophische Bemerkungen. Schriften 2.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1970.
[1967a] *Wittgenstein und der Wiener Kreis. Schriften 3.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1980.
[1967b] *Zettel. Schriften 5.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1982.
[1969] *Philosophische Grammatik. Schriften 4.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1969.
[1975] *Wittgensteins Vorlesungen über die Grundlagen der Mathematik. Schriften 7.* Frankfurt am Main, Suhrkamp, 1978.

Wright, Crispin [1980] *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics.* London, Duckworth, 1980.