Guillermo Nigro Puente*

Iteratividad y demostración: nota sobre la infinitud de las pruebas en Chateaubriand[1]

Resumen

Si examinamos la práctica matemática, podemos notar que se suele no respetar las exigencias de lo que usualmente una prueba debe ser. Asumiendo esto, podemos admitir una distinción entre matemática real y matemática ideal. ¿Qué tanta distancia aceptable puede haber entre una y otra? ¿Qué pasaría en el caso de que una práctica pretenda hacer uso de una prueba infinita? En este caso la cosa sería más complicada, y aquí es donde viene a colación el dramatismo de la pregunta: "¿Es ésta una prueba o no?" Una tesis defendida por Oswaldo Chateaubriand parece implicar que sostener que se trata de una prueba por derecho propio implica abandonar el concepto usual de prueba por uno más amplio. La pretensión de este trabajo es sugerir que el reconocimiento de la práctica demostrativa envuelta en un caso presentado por Chateaubriand puede ser conciliado con el concepto usual de prueba (en un sistema formal ampliado), con el fin de representar dicha práctica. Como resultado, podríamos hablar de un estilo de prueba en matemáticas.

Palabras-claves: demostración; finitud; prácticas demostrativas; regla-ω constructiva; regla-ω; iteratividad.

Abstract

If we examine mathematical practice, we note that the proofs used often do not meet the requirements of what, usually, a proof should be. Assuming this, we admit a distinction between real and ideal mathematics. How long can the acceptable

---

1 Agradezco los comentarios y la paciencia de Abel LassalleCasanave y Miguel Molina, Matías Osta, Alejandro Chmiel y Fernanda Pallares sin los cuales este trabajo no vería la luz. Lo errores que aún presente son, claro está, responsabilidad del autor. Agradezco, además, a Cecilia Gutiérrez por la corrección hecha a un borrador de este trabajo. El mismo fue posible gracias al apoyo de la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC), Uruguay en el marco de la investigación *Diagramas y Demostraciones* (CSIC 2011).

* Instituto de Filosofía. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad de la Republica. Montevideo, Uruguay

distance between them be? What would happen if a certain practice wishes to make infinite use of a proof? In this case, things would be more complicated; and here we see the full relevance of the question "Is this a proof or not?" A thesis defended by Oswaldo Chateaubriand seems to imply that holding that such a proof is a proof in its own right leads us to abandon the usual concept of a proof for a broader one. The aim of this work is to suggest that recognition of the demonstrative practice involved in the case brought by Chateaubriand can be reconciled with the usual concept of proof (in a formal system expanded), in order to represent practice. As a result, we could speak of a style of proof in mathematics.

Keywords: demonstration; finitude; demonstrative practices; constructive ω-rule; ω-rule; iterativity.

Si examinamos la práctica matemática, podemos notar que se suele no respetar las exigencias de lo que usualmente una prueba debe ser. Admitiendo esto, podemos admitir una distinción entre *matemática real* y *matemática ideal*. Puestas las cosas así, tenemos, por un lado, tenemos un *modelo* de prueba, su "deber ser", mientras que por otro tenemos la práctica demostrativa, el "ser". ¿Qué tanta distancia aceptable puede haber entre una y otra? Después de todo, el modelo nunca es completamente igual a lo modelado. ¿Es la distancia que puede a veces observarse tan fuerte que nos obliga a decir que el concepto usual de prueba no es una correcta elucidación de la noción de consecuencia lógica, o que no sirve como modelo de las prácticas demostrativas? ¿Cuándo es peligrosa esa distancia? La mayor parte de las veces, las pruebas en matemáticas no están, por ejemplo, completamente formalizadas (como exige el modelo.) ¿Deben, por ello, esas prácticas ser consideradas ilegítimas por ello esas prácticas? ¿Es esta una distancia peligrosa? Algo comúnmente dicho es: "esa demostración no está formalizada, pero eso no es un problema, puesto que es *susceptible* de serlo; podríamos hacerlo si quisiéramos, y por lo tanto debe ser considerada como legítima"

Pero, ¿qué pasa en el caso de que una práctica pretenda hacer uso de una prueba *infinita*? En este caso la cosa es más complicada, y es donde viene a colación el dramatismo de la pregunta: "¿Es una prueba o no?" Decir "no" sería afirmar la tesis tradicional; la razón sería que no hay pruebas infinitas; decir "sí" es rechazar la tesis tradicional; y la razón es *otra* tesis: esta implicaría una noción más generosa de prueba. ¿En qué aspecto debe ser "más generosa"? ¿En admitir pruebas infinitas, por ejemplo? Si tomamos a la prueba como una *estructura matemática* más, entonces – dado que admitimos estructuras infinitas todo el tiempo – una prueba puede consistir perfectamente en una estructura infinita. ¿Cómo nos las vemos con ella? De igual forma en que lo hacemos en matemática ordinaria: *describiéndola*. Esta movida argumental permite decir que lo necesariamente finito es la *descripción*, que en la práctica damos, de una estructura (que es la prueba). Tenemos pues, la descripción por un lado, y la prueba por otro.

Ésta es, *grosso modo,* la tesis defendida por Oswaldo Chateaubriand (Chateaubriand; 2005, caps. 19-20). El propósito de este artículo es sugerir cierta duda acerca del dramatismo que encierra esta pregunta, en relación a un ejemplo propuesto por el propio Chateaubriand. A mi juicio, el ejemplo dado por Chateaubriand merece un pequeño examen aparte básicamente por dos razones: (1) no ha recibido un tratamiento lo suficiente mente pormenorizado, ya que generalmente se lo presenta – en la literatura pertinente – sin agregar mucho más a lo que el propio Chateaubriand dice[2]; (2) dicho ejemplo reviste interés en sí mismo como representante de lo que parece ser un *estilo de prueba* en la práctica matemática, el que puede ser caracterizado, en primer lugar, como un estilo que apela a razonamientos *iterativos* como estrategia de prueba. A la pregunta por la legitimidad de la práctica envuelta en este caso, responderé que sí es legítima; pero que ésta no nos fuerza necesariamente a admitir la existencia de pruebas infinitas (al menos para el caso propuesto). Mi respuesta es similar, en espíritu, a la dada por nuestro hipotético matemático; pero no con la pretensión de defender la concepción usual de lo que una prueba debe ser, sino para sugerir la riqueza de la interacción entre el plano ideal (tal como lo hemos recibido) y el plano real. Este trabajo no tiene, pues, la pretensión de arrojar sombras sobre una obra acerca de la cual podemos decir que ha marcado una agenda en la filosofía de las ciencias formales (al menos en estas regiones), sino mostrar su riqueza, incluso para lo puede decirse constituye una perspectiva diferente a la de Chateaubriand. En otras palabras: incluso para quien pretenda aferrarse a la idea clásica de prueba (lo cual no es el caso del autor de este trabajo), se debería – haciendo uso de una conocida sentencia de Nozick acerca de la obra de Rawls – hacer referencia a esta obra, o explicar porque no lo ha hecho.

La argumentación que intentaré exponer se desarrollará mediante la presentación de un análisis alternativo de un ejemplo dado por Chateaubriand, con la pretensión de, por un lado, ser fieles al poder de convicción del argumento presente en el ejemplo original (y en ese sentido seríamos fieles a la

2 Excepciones pueden encontrarse en (Porto, A.; 2008) y (Rosa Ferrari, L.; 2006).

práctica matemática); y, por otro, afirmar que estamos frente a una demostración (en el sentido de que no perdemos la condición de finitud).

En la primera sección, introduzco el problema de la finitud de las pruebas, en relación con el problema filosófico de juzgar el concepto usual de prueba como elucidación de lo que intuitivamente, o en la práctica, admitimos como demostración. En la segunda, presento el ejemplo de prueba infinita de Chateaubriand, y explico cuál es su relevancia para esta discusión. En la tercera, intento dar un análisis alternativo del ejemplo que trate de mostrar cómo, para este caso, podemos hacer menos dramática la distancia entre la idealización y la práctica demostrativa. Finalmente, en la cuarta, hago algunas consideraciones acerca de las relaciones entre nuestro concepto usual – idealizado – de prueba y las prácticas demostrativas. Como resultado sugiero que podríamos hablar de *estilos de pruebas* en la práctica matemática cuya legitimación no violente a tal extremo nuestro concepto idealizado de prueba.

1) El requisito de finitud de las pruebas

Un aspecto importante del concepto usual de *prueba* o *demostración* es su carácter *finito*. Cualquier definición que aparezca en un manual de lógica dirá, de una prueba, que es ante todo "un conjunto finito de sentencias…"; podemos denominar a esta tesis *sintactista.*[3] En este contexto, no pueden existir pruebas infinitas en el sentido de contener infinitos pasos, ello se debe a que, en tal, caso no tendríamos un paso específico al que pudiésemos aplicar una regla de inferencia que nos permita derivar la conclusión (la última línea de la demostración). Algo más que debe ser destacado acerca de la tesis sintáctica, en relación con lo que nos interesa, es que ésta involucra cierta noción de *justificación*, y *a fortiori* de aceptación, por parte de quien comprende la prueba; ésta noción puede ser emparentada con el requisito de *testabilidad algorítmica*.

En el capítulo 19 de *Logical Forms* (Chateaubriand; 2005) Chateaubriand discute el concepto de prueba tal como se encuentra en Enderton (Enderton; 2001), con el fin de evaluar si se trata de una correcta elucidación del concepto de *consecuencia lógica*. Como el concepto de prueba está determinado en parte por el requisito de finitud, Chateaubriand propone un ejemplo de argumento que es un caso de consecuencia lógica, pero que a la vez requiere un número infinito de premisas. Antes de especificar en qué consiste el requisito de finitud, veamos qué es lo que Chateaubriand pretende.

3 Esta denominación es extraída de (Seoane ; 2008). Se trata de una forma de denominar la tesis clásica.

A primera vista, parece que se intenta cuestionar el concepto de prueba, en el entendido de que existen pruebas (en el sentido intuitivo de la palabra) que no cumplen con los requisitos formales estándar. En este sentido, Chateaubriand criticaría la *elucidación* clásica del concepto intuitivo de prueba o demostración; así lo ve Seoane (Seoane, J.; 2008). Sin embargo, en (Chateaubriand; 2008) Chateaubriand dice que no es la intención evaluar la elucidación del concepto intuitivo de prueba, sino la elucidación del concepto de *consecuencia lógica* en términos de prueba. Algo que creo destacable es que Chateaubriand no apela a un conocido contraejemplo de Tarski (Tarski; 1936) para mostrar un caso de argumento donde hay consecuencia lógica, pero la conclusión no se puede derivar de las premisas (razón por la cual no se trata de una prueba). La estrategia de Chateaubriand es, sin embargo, más compleja: se trata de dar un ejemplo de prueba o argumento en el que se muestra cómo una proposición se sigue, o es consecuencia lógica, de un conjunto *infinito* de premisas o hipótesis. Aquí debemos ir con cuidado, porque considerar el ejemplo como una *prueba* es rechazar la tesis sintáctica (o al menos así se presenta esta problemática). Como moraleja de esta postura, tenemos que la finitud no es necesaria para la relación de consecuencia lógica, y, *a fortiori*, tampoco para el concepto de prueba.

Supongamos pues que sí se trata de una prueba, y que, por lo tanto, estamos ante una práctica demostrativa legítima[4]. En consecuencia, debemos tener un concepto más generoso de prueba que el admitido por la tesis sintáctica; esa generosidad debería hacer al concepto de prueba insensible a la diferencia entre finitud e infinitud.

Lo primero a notar, siguiendo el planteo de Chateaubriand, es que, cuando damos una prueba de algo a alguien, lo que hacemos es *describirla*. Decimos que si tú haces tal o cual cosa, entonces obtendrás tal otra (Chateaubriand; 2005, p. 283), y esta descripción es – necesariamente – finita; llegado este punto, podemos plantearnos la siguiente situación disyuntiva: la prueba *es* su descripción, o bien la prueba es una estructura que en la práctica describimos. Si optamos por la primera alternativa, el requisito de finitud es evidentemente correcto; pero si optamos por la segunda (como el propio Chateaubriand hace), entonces no parece para nada extraordinario afirmar que realizamos descripciones *finitas* de estructuras *infinitas*.

4 Se trata de admitir que la práctica matemática muestra una peligrosa distancia con la concepción sintáctica de la prueba, y como consecuencia de esto, podemos tener serias dudas acerca de la aceptabilidad filosófica de la tesis sintactista.

Esta última postura permite "salvar" el fenómeno evidente de que, cuando damos una prueba, nuestra tarea es finita, a la vez que respeta la validez intuitiva de ciertas prácticas demostrativas, es decir, nos permite llamarlas "pruebas". No es la pretensión de este artículo reflexionar sobre esta postura que escinde *la* prueba (en tanto que estructura matemática abstracta) de la descripción (o descripciones) que damos de ella; sin embargo, alguien podría preguntarse por el estatus *ontológico* que adquiere aquí la prueba. En nuestra vida diaria podemos toparnos con muchas *descripciones* de una prueba (que eventualmente juzgamos como correctas o incorrectas), pero ¿alguna vez accedemos a *la* prueba? ¿Cómo es que podemos determinar si ésta (no su descripción) es correcta? O, si tenemos dos descripciones de una misma prueba, ¿podemos preferir – en algún sentido – una a la otra? En lógica, podemos preferir un prueba a otra por razones heurísticas (mayor economía, más intuitiva, etc.); pero en este contexto la prueba es la descripción. Sin embargo, en el caso de Chateaubriand, si la prueba es una estructura matemática *objetiva*, podríamos preguntarnos si una descripción es más "verdadera" que otra, o describe "mejor", o es "más convincente" que otra. Pero junto con el abandono de exigencias tradicionales acerca de las pruebas, debemos incorporar aspectos novedosos a las mismas: dado que en estos casos no podemos hacer uso del elemento epistémico tradicional: la *regla de inferencia*. Entonces, debemos apelar a otros aspectos, que nos permitan tomar como admisibles a ciertas prácticas demostrativas y no a otras. Este otro aspecto parece ser parcialmente capturado por el grado de *convicción* que un razonamiento genera en un auditorio respecto al resultado que se le presenta[5]. Este estándar de comprensión no es identificado con la idealización tradicional de testabilidad algorítmica.

Esto último es un componente *retórico* que usualmente es dejado de lado en la filosofía de la lógica estándar. Sin embargo, parece haber un tal componente retórico en la concepción de prueba de Chateaubriand que ya ha sido señalado[6], de esto se sigue que podemos diferenciar descripciones por su admisión en ciertos contextos, y esto es importante debido a la importancia que Chateaubriand le da a la capacidad – que una prueba tiene – de generar

---

5 Es importante notar que esta diferencia no apunta a diferenciar pruebas correctas de las incorrectas, sino, en todo caso a uno de los objetivos sobresaliente de la *actividad* de probar: el generar la convicción de quien recibe la prueba.

6 Por ejemplo, en (Lassalle Casanave; 2008). El componente retórico está presente, sobre todo, en la medida en que se hace intervenir a un *auditorio*. Si damos una prueba infinita a un finitista radical, éste no la aceptaría como tal. En este sentido, él no aceptaría como legítima nuestra práctica demostrativa.

convicción en un auditorio ("proof must carry conviction")[7]; ese "éxito" (en el mejor sentido de la palabra) depende, en parte también, de la referencia que se haga a conocimientos previos.[8]

Este interés por un análisis pragmático de nuestras prácticas demostrativas parece dejar en suspenso algunos aspectos definitorios del concepto usual de prueba, como el requisito de finitud o el de testabilidad algorítmica.

Pero, ¿en qué consiste pues el requisito de finitud? Enderton lo pone de la siguiente manera:

> […] a proof should be finitely long, as you cannot give all of an infinite object to another person. If the set of hypotheses is infinite, they cannot all be used. (Enderton; 2001, p. 109).

Antes de ver el ejemplo que Chateaubriand presenta, podemos esclarecer brevemente los conceptos a los que recurrentemente echaremos mano: en lo que sigue trataré de usar la expresión "prueba" de un modo fiel al uso que Chateaubriand le da, —i.e. como una estructura matemática que describimos en nuestras prácticas demostrativas. "Demostración", por otro lado será usada en el sentido usual (cercana al concepto de *idealización de la prueba* de Chateaubriand).

2) El contraejemplo de Chateaubriand

En la página 285 (*Íbid.*) Chateaubriand propone un argumento en el cual la conclusión S establece que una relación R tiene un dominio infinito, a partir de un conjunto infinito de hipótesis A:

(I) $\forall x\, \forall y\, ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
(II) $\forall x\, \neg Rxx$
(III) Ra_1a_2
(IV) Ra_2a_3
(V) Ra_3a_4

Usualmente probamos a nuestros estudiantes – dice Chateaubriand – que R tiene un dominio infinito razonando del siguiente modo: De (ii) y (iii) se

7 (Chateaubriand; 2005, p. 290).

8 Cfr. (Chateaubriand; 2005, p. 291)

sigue que a_1 es diferente de a_2. De forma similar, de (ii) y (iv) se sigue que a_2 difiere de a_3. Además, como de (i), (iii) y (iv) se sigue que Ra_1a_3, se sigue de (ii) una vez más que a_3 difiere de a_1. Por un argumento análogo se sigue que a_4 difiere de a_1, a_2 y a_3. *Y así sucesivamente*. Por lo tanto, todos los a_i son diferentes y *R* tiene un dominio infinito.

Luego de presentar el ejemplo, Chateaubriand realiza el siguiente comentario:

> What we have proved here? I would say that we have proved that the statement *S* that *R* has an infinite domain is a *logical consequence* of the set of hypotheses *A*. Our communication to the students is finite, but the structure of the proof is infinite –and it uses all the hypotheses in *A*. (Chateaubriand; 2005, p. 285)

Nótese que, según Chateaubriand, lo que estamos probando es que *S* es una consecuencia lógica de *A*. La pregunta es pues, de qué manera. La cuestión clave aquí es que, en el argumento de arriba, *S* es una consecuencia lógica del conjunto *A sólo* en la medida en que tengamos en cuenta todas las hipótesis que están en *A*, pero, dado que *A* es infinito, el argumento <*A*; *S*> es un argumento con infinitas premisas, y así, estamos ante un argumento con una estructura infinita. El razonamiento nos fuerza a aceptar la infinitud de *R* sobre la base de que *A* (el conjunto de hipótesis) es infinito también.

Por otro lado, en la cita de arriba, Chateaubriand dice que "hemos probado" la infinitud de *R*, o mejor dicho, hemos probado que *S* es consecuencia lógica de *A*, es decir, hemos mostrado (por medio de un razonamiento) que asumiendo la verdad de las hipótesis, debemos aceptar también la verdad de la conclusión. ¿Qué quiere decir que "hemos probado"? No puede querer decir que hemos *demostrado* algo, puesto que no hay algo así como una demostración; a la conclusión no la hemos extraído por medio de la aplicación de una regla. Tampoco se está haciendo referencia a *la* prueba (en el sentido de Chateaubriand), la cual es una entidad abstracta, sino que el verbo sugiere que hablamos acerca de lo que *nosotros* hemos hecho. Creo que Chateaubriand estaría de acuerdo en que, según su teoría, estamos *describiendo la prueba* –i.e., estamos describiendo una estructura. En este sentido, el razonamiento por medio del cual hacemos ver al auditorio que hay consecuencia lógica *no es parte de la prueba*. En este escenario es claro que no se trata de una *demostración*, reformulando la pregunta planteada al comienzo de este trabajo, podemos ahora preguntarnos lo siguiente: ¿Es posible hablar de una práctica demostrativa legítima a pesar de que no contamos con una demostración? Esta pregunta esconde la siguiente tesis: si legitimamos esta práctica (si decimos que hemos probado), entonces la tesis sintactista es incorrecta (puesto que no hay demostración), y *a fortiori* necesitamos otra noción de prueba. Por esta razón es que, si respondemos "sí", entonces admitimos la existencia de pruebas infinitas, pero no tenemos que admitirlas si respondemos "no". ¿Estamos forzados a aceptar esta tesis?

En esta sección pretendemos arrojar ciertas dudas sobre esto. En virtud de dar una respuesta similar a la de nuestro hipotético matemático hay algo que debemos tener en cuenta: se trata del *razonamiento* que está envuelto en la exposición de arriba. Legitimarla implicaría decir que el razonamiento dado es probatorio en algún sentido, y así, que en este sentido, no tiene un rol meramente heurístico. Sin embargo, no podemos olvidar que son las infinitas hipótesis las que garantizan la conclusión y no el razonamiento que las acompaña. Éste tiene su valor a la hora de hacernos "ver" cómo la conclusión se sigue de las hipótesis (y generar convicción sobre ello). La tarea es, pues, darle un lugar a ese razonamiento, sin que ello implique violentar el requerimiento clásico de la finitud.

3) Un análisis alternativo del ejemplo

¿Hay alguna forma de reconstruir la práctica demostrativa del ejemplo que no implique un argumento con infinitas premisas? Si esto fuera así, estaríamos habilitados a dudar de que el análisis de las prácticas demostrativas pueda cuestionar tan dramáticamente nuestras concepciones usuales acerca de la demostración.

Pero, antes de atacar directamente esta problemática, veamos con un poco más de detalle el problema lógico acerca de las pruebas o los argumentos infinitos.

3.1) ¿Qué es un argumento-ω?

Lo que comúnmente se conoce como argumento-ω nace de la idea de Gödel de poder sortear el problema de la incompletitud de la aritmética planteando la posibilidad de poder derivar un enunciado de un conjunto infinito de hipótesis. Un ejemplo canónico de este tipo de argumento es el de Tarski (Tarski; 1936, p. 410)[9]:

9 La pretensión original de este ejemplo es el de cuestionar la extensión del concepto *sintáctico* de consecuencia lógica, que une esta noción a la de prueba o derivación.

A_0: 0 posee la propiedad dada *P*.
A_1: 1 posee la propiedad dada *P*.

Y, en general, todas las sentencias particulares de la forma
A_n: *n* posee la propiedad dada *P*.

Donde '*n*' representa cualquier símbolo que denota un número natural en un sistema numérico dado (por ejemplo, el decimal). De la unión de todos los A_n obtendríamos la siguiente conclusión:

A: Todo número natural posee la propiedad dada *P*.

Ninguna de nuestras reglas habituales nos permite extraer la conclusión a partir de la conjunción de todos los A_n, y esto se da sencillamente porque nuestras reglas habituales son *finitas* –i.e. requieren un número finito de premisas para ser aplicadas. Es por ello que la hipotética existencia de estos argumentos requiere la postulación de una *regla infinita*, una regla-ω. Parece claro que en este caso que la convicción sobre la verdad de la conclusión depende de haber afirmado previamente todas las premisas. Nótese que aquí (como en el caso propuesto por Chateaubriand) el problema no es el de *reconocer* que el argumento es un caso de consecuencia lógica, ya que cualquiera puede convencerse de ello razonando de modo trivial: si cada uno de los números naturales poseen la propiedad *P*, entonces *todos* la poseen.[10] El verdadero problema aquí es si poseemos un *marco formal* que nos permita derivar la conclusión de las infinitas premisas; es decir, dado que ninguna de las reglas nos permite derivar la conclusión, nos vemos obligados a considerar si una regla como la omega puede ser incorporada. Y en este sentido es que *no podemos demostrar* que estamos ante un caso de consecuencia lógica; incluso si aceptáramos una regla como la omega, no dejaríamos de estar ante una prueba infinita.

Pero nótese que, si bien cualquiera puede convencerse de que estamos ante un caso de consecuencia lógica, es bastante más difícil aceptar que una "explicación" como la dada arriba sea una "prueba" de ello. ¿En virtud de qué podemos decir que aquí no hay una práctica demostrativa aceptable y sí la hay en el ejemplo Chateaubriand? Parece que el concepto de práctica demostrativa trasciende o es más generoso, que el de *prueba formal*, en el entendido de que podemos "probar" sin derivar una proposición en un sistema formal.

10 Nótese que se trata de un razonamiento más sencillo y más irrelevante que el de Chateaubriand.

3.2) ¿Podemos dar una versión finita de la prueba en términos aceptables para Chateaubriand?

¿Debemos alterar violentamente nuestra noción de prueba para incorporar este razonamiento a la demostración? Para responder a esta pregunta, primero tendríamos que explicar un poco más cuáles serían dichos términos aceptables. Parece claro que lo que la reconstrucción debe preservar es el *razonamiento* que acompaña a las hipótesis, por lo que debemos especificar cuál es pues, la mecánica de tal razonamiento. Creemos razonable decir que el razonamiento se apoya en la *iteratividad* (o repetibilidad), que nos permite mostrar cómo podemos ir construyendo *indefinidamente* sub conjuntos de R cada vez más grandes; a esto lo hacemos mostrando que todos los individuos considerados hasta la hipótesis k son distintos, luego, en la hipótesis $k + 1$ afirmamos que un nuevo individuo se relaciona, por medio de R con el individuo añadido en la hipótesis k. Concretamente hablando, en la hipótesis (iii) tenemos un conjunto $C_1 \subseteq R$ con dos individuos distintos; es decir, por medio de (ii) mostramos que a_1 y a_2 son distintos, y así que R tiene al menos dos individuos. Pero el razonamiento no termina allí: tenemos que mostrar que podemos seguir generando C_i cada vez más grandes. Para hacer esto necesitamos, por un lado, *introducir* una *nueva hipótesis* en la que un nuevo individuo (a_3 en el caso de (iv)) se relaciona con a_2. Luego, proceder igual que en (iii) $a_3 \neq a_2$, pero por (i), Ra_1a_3. Por lo tanto, para ir generando sub conjuntos de R cada vez más grandes, necesitamos ir introduciendo *nuevas hipótesis* y *repitiendo el razonamiento*; en este sentido, la infinitud de R necesita la infinitud de las hipótesis. Pero además, y esto es lo importante, la *comprensión* (y la convicción) del argumento no exige que tengamos presente las infinitas hipótesis (cosa que sería absurda). Las infinitas hipótesis son lo que *prueba* (en el sentido de Chateaubriand) la infinitud de R, pero no intervienen en nuestra *práctica demostrativa*. Lo que aquí interviene es la *efectiva repetibilidad* del razonamiento, su carácter iterativo. Es menester tener en cuenta que esta iteratividad *no demuestra* la infinitud de R, pero ¿cuál es su rol entonces? Si no la demuestra, no diríamos que tiene un rol *lógico*. No tampoco diríamos que un razonamiento con esas características es *correcto*. Nótese que razonando así podríamos cometer un error como el siguiente:

De las premisas:

{1} tiene máximo;

{1, 2} tiene máximo;

inferir (aceptando la infinitud de las premisas):

{N} tiene máximo.

Parecería, pues, tener un rol *retórico* (en el sentido que Lassalle Casanave le atribuye a Chateaubriand)[11]. Con este estado de situación, podríamos decir que hemos alcanzado el divorcio pretendido entre el concepto usual de prueba y las prácticas demostrativas[12].

Pero también podríamos decir que, aunque no prueben la infinitud de *R*, nos permite demostrar algo acerca de *R* que sí implica su infinitud: su falta de cota superior. Pero, ¿cómo podemos hacerlo? Podríamos mostrar que *R* no tiene *máximo*. La carencia de elemento máximo es lo que nos muestra la posibilidad de ir construyendo sub conjuntos cada vez más grandes.

Podríamos poner lo dicho en los siguientes términos:

> Si de un modo uniforme podemos agregar siempre al dominio de *R* una a_i tal que $a_i \neq a_j$ para todo j con $j < i$ y perteneciente al dominio, entonces *R* es una relación transitiva, antirreflexiva (hipótesis (i) y (ii)) y *no acotada superiormente.*

Que *R* no tiene cota superior quiere entonces decir que, para todo individuo de *R*, hay otro individuo que está en la relación *R* con el primero. La cláusula *y así sucesivamente* nos está diciendo que *siempre* contamos con ese individuo, en la medida de que, dado un individuo arbitrario, habrá otro del que – por medio de la *repetición* del razonamiento – demostraremos que es distinto, y que también pertenece al dominio de *R*.

Llegado este momento, podemos decir que el conjunto *A* es un objeto bien definido (por medio de una descripción) como la unión de todos los pasos $k > ii$ más las dos hipótesis universales, tal que cada k es generado por el razonamiento descrito. En otras palabras: sabemos en qué consiste *A* y sabemos el

11 Véase (Lassalle Casanave, 2008.)

12 Lograremos esto a condición, claro está, de que aceptemos como válida la expresión “hemos probado” de Chateaubriand.

contenido preciso de *A* (en el sentido de que podemos determinar cada uno de los pasos por medio de aplicar el razonamiento). Es mediante la comprensión de este proceso que "vemos" (gracias a la descripción) cómo una conclusión se sigue de unas hipótesis más la explicación de un razonamiento.

Ahora podemos darnos una idea de cómo reconstruir el argumento conservando el razonamiento:

(1) $\forall x\ \forall y\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$

(2) $\forall x\ \neg Rxx$

(n)[13]$\forall x\ \exists y\ Rxy$.

(3) ∴ R es infinita.

Lo que tenemos aquí es que la infinitud de *R* es *consecuencia lógica* de la *transitividad*, la *irreflexividad* y la *falta de cota superior* de *R*. En la presentación de Chateaubriand no figura (*n*), sino que en su lugar figura la infinita cantidad de premisas en las cuales vamos agregando indefinidamente individuos al dominio de *R*. Es claro que, a falta de algo como (*n*), necesitamos las infinitas premisas para que el dominio de la relación sea infinito. Es claro además, en ese contexto, que, si quitamos una premisa, ya no hay consecuencia lógica.

La cuestión urgente ahora es cómo afirmar (*n*); esto está implícitamente contestado en (I), y la regla usada en esta ocasión puede ser formulada del siguiente modo:

> (RCω) Si cada $P(n)$ puede ser demostrado de un modo uniforme (a partir del parámetro *n*), entonces se puede concluir $\forall n\ P(n)$.

Esta es una formulación de una variante de la regla-ω que se suele denominar "constructiva"; con esta regla podemos introducir, como hacen Bundy, Jamnik y Fugart[14] una *prueba esquemática* en la cual tenemos un procedimiento que, dado un ejemplo, genera una prueba específica para ese ejemplo.

Lo que mostramos razonando con (i)-(v) es un caso especial de un patrón de razonamiento general, un esquema de prueba. Usando la versión cons-

---

13 Aquí *n* es el número de paso que corresponde a una sub prueba.

14 Bundy; *et alt;* 2005.

tructiva de la regla-ω podemos probar, así, la ecuación $\forall x\ (x + x) + x = x + (x + x)$, generando pruebas de $(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0)$, $(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1),\ldots$ y extrayendo un *patrón general* o *esquema* de estas pruebas, pudiendo probar así, la ecuación para cualquier valor de x —i.e. probar la fórmula universal.

El mayor interés para el estudio de esta versión de la regla-ω es *práctico*, o, como lo ponen Bundy, Jamnik y Fugart:

> The constructive ω-rule is a refinement of the ω-rule that can be used in practical proofs. It has the additional requirement that the $\varphi(n)$ premises be proved in a uniform way, i.e. that there exists a recursive program, $proof_{\varphi}$, which takes a natural number n as input and returns a proof of $\varphi(n)$ as output. (Bundy; *et alt*; 2005, 2381)

La versión constructiva, es pues, una restricción computacional; lo que más cabe destacar es que si tuviésemos que diseñar un argumento distinto para cada n, entonces tendríamos una infinita cantidad de argumentos y el problema de la infinitud perduraría. Sin embargo, al introducir la noción de *prueba esquemática* o *prueba general*, lo que necesitamos establecer es la validez de *una* prueba, por lo que eliminamos la infinitud.

$$\frac{\vdash \Delta x\ (\Sigma \vdash A(x))}{\vdash \forall x\ (\Sigma \vdash A(x))}$$

donde Δ significa que tenemos una prueba general de $A(x)$. La introducción del cuantificador-δ se da cuando tenemos un modo uniforme de probar $A(x)$ para cada instancia de x. Es decir, podemos *repetir* la prueba para cada instancia. En este contexto, podemos introducir el cuantificador- **δ.**[15]

De modo análogo, podemos extraer del razonamiento, un modo de probar (n): siempre podemos tomar un individuo "nuevo" (no contenido en ninguna hipótesis anterior) y mostrar que está en la relación R con todos los individuos que ya lo estaban, y que, además, difiere de todos ellos. El razonamiento con las hipótesis (iii)-(v) fungen como ejemplos explicativos, a partir del cual extraemos un *esquema de razonamiento*.

En un metalenguaje, podríamos sustituir las infinitas instanciaciones que nos mueven a pensar en infinitas hipótesis por una tercera formula universal, tal que: definimos una función s (la sucesora, con dominio en los naturales,

15 Véase (Bundy; *et alt;* 2005) o (Baker; *et alt*; 1992).

por poner el caso) que marque los individuos con un índice y cuantificamos universalmente sobre i lo siguiente: "$R((a_i), s(s(a_i))) \wedge (a_i \neq s(a_i) \wedge \neq s(s(a_i)) \wedge a_i \neq s(s(a_i)))$". Podemos construir una prueba de esto para cada instancia de i.

Veamos esto con un poco más de detalle:

El razonamiento del ejemplo nos dice, en primer lugar que

(a) $\vdash \{Ra_1a_2; Ra_2a_3; (1); (2)\} \vdash Ra1a_3 \wedge (a_1 \neq a_2 \wedge \neq a_3 \wedge a_1 \neq a_3)$.

Pero además nos dice que podemos *extender* el razonamiento a los sucesores de los índices *cualquier* número de veces —i.e. aplicando cualquier número de veces la función sucesora a sus índices[16]. Sea $s^n(i)$ el resultado de aplicar n veces la función s al índice i; luego

$$\{Ra_{s^n_1}a_{s^n_2}; Ra_{s^n_2}a_{s^n_3}; (1); (2)\} \vdash Ra_{s^n_1}a_{s^n_3} \wedge a_{s^n_1} \neq a_{s^n_2} \neq a_{s^n_3}$$

En este contexto podemos afirmar además

(b) $\vdash \{Ra_1a_2; Ra_2a_3; (1); (2)\} \vdash Ra_1a_3 \wedge a_1 \neq a_2 \neq a_3 \vdash \{Ra_1a_2; Ra_2a_3; (i); (ii)\} \vdash$
$\{Ra_{s^n_1}a_{s^n_3} \wedge a_{s^n_1} \neq a_{s^n_2} \neq a_{s^n_3}$

Es decir, de una prueba que utiliza los índices 1, 2 y 3, podemos *repetir* la prueba para construir una prueba para los índices s^n_1 , s^n_2 y s^n_3, y ésta es la uniformidad que estábamos buscando. De aquí podemos extraer una *prueba general* que nos da, por cada instancia de i, la prueba que deseamos:

(c) $\vdash \Delta i \; (\{Ra_1a_2; Ra_2a_3; (1); (2)\}) \vdash Ra_ia_{s(s(i))} \wedge a_1 \neq a_{s(i)} \neq a_{s(s(i))}$

Finalmente, por la aplicación de la regla-ω constructiva, tenemos

(d) $\{Ra_1a_2; Ra_2a_3; (1); (2)\} \vdash \forall i \; (Ra_ia_{s(s(i))} \wedge a_1 \neq a_{s(i)} \neq a_{s(s(i))})$

Pero esto quiere decir que, para todo individuo de R, existe otro (que al menos será el denotado por la constante sucesora de la que denota al primero) que se relaciona con el primer individuo por medio de R. Lo que implica $\forall x \; \exists y \; Rxy$. Luego, el razonamiento nos permite mostrar la falta de cota su-

16 Nótese que al usar la función sucesora evitamos la posibilidad de caer en sucesiones periódicas.

perior de R; pero, además, nos permite demostrar que R es infinita, puesto que hemos obtenido las propiedades formales de una relación que sólo las estructuras infinitas pueden satisfacer. Y lo hemos hecho por medio de un argumento finito, y rescatando al razonamiento involucrado en la práctica demostrativa.

Parece razonable, por otro lado, identificar la extracción del patrón general (por parte de quien estudia el argumento) con la comprensión del razonamiento, y la posibilidad de expandirlo nos da la pauta de que podemos incrementar la cardinalidad de cada C_i indefinidamente. Esta reconstrucción rescata, pues, el razonamiento iterativo que nos convence de la infinitud de *R*. La comprensión del esquema puede explicar el hecho obvio de que no poseemos una comprensión cabal de cada instancia (no tenemos un conocimiento *intuitivo* en este caso), pero que al mismo tiempo podemos tener un conocimiento *simbólico*.[17] ¿Qué es lo que podemos testar algorítmicamente? Podríamos, como Chateaubriand mismo dice (Chateaubriand; 2005, p. 287), testar la instancia $i^{10^{10}}$, pero parece intuitivamente inaceptable decir que tenemos una comprensión de ello. Sin embargo, en nuestra reconstrucción, lo único que necesitamos entender es el esquema de la prueba general; podemos repetir el razonamiento un número arbitrario de veces con el fin de que quien recibe la prueba pueda extraer el patrón general que le permita convencerse de que podemos testar la instancia $i^{10^{10}}$ si quisiéramos; todo esto, claro, *sin pretender* que debamos comprender cada instancia *j* anterior a $i^{10^{10}}$.

4) Algunas consideraciones finales

Las reflexiones presentes en las páginas anteriores tienen como objeto cuestionar o favorecer la duda sobre si el análisis de la práctica matemática (en uno de los casos presentados por Chateaubriand) implica el abandono de ciertas propiedades clásicas de las pruebas. Para ello, hemos hecho un movimiento similar al de nuestro hipotético matemático de los primeros párrafos, es decir, hemos intentado conciliar la legitimación de una práctica demostrativa con el requisito de finitud de las pruebas. Ahora bien, esto no es una prueba de que *no existan pruebas infinitas*, aunque puede pensarse que (asumiendo el éxito del análisis de la sección anterior) tenemos herramientas

---

17 Este punto puede complementar la opinión de Lassalle Casanave (Lassalle Casanave ; 1999, p.100), en el sentido de que la comprensión de la prueba general no permanece ausente en la operativa del cálculo.

– como la regla-ω constructiva – para volver finitas cierto tipo de pruebas que se presumen infinitas. Podríamos decir que las pruebas que apelan a cierto tipo de *iteratividad* no implican la infinitud (en tanto que podemos aplicar la regla), y que si reconocemos una clase de argumentación en matemáticas, o un estilo que de un modo u otro apele a la iteratividad, entonces podemos legitimar esas prácticas sin violentar nuestro concepto usual de prueba. No parece haber una discusión filosófica acerca de la regla-ω constructiva, pero la lógica de ésta parece cristalizar, para ciertos casos, en algo aproximado al noción wittgensteniana de prueba (Wittgenstein; 1987).

El espíritu de este trabajo es hilbertiano en el siguiente sentido: afirma que la matemática es una actividad creadora. Los sistemas formales no son "estáticos", sino que son susceptibles de ser modificados, para representar una mayor gama de fenómenos (como los de la práctica matemática).

Una objeción importante a la reconstrucción presentada podría ser que ésta no describe la misma estructura que la del ejemplo presentado por Chateaubriand. Sencillamente, podría decirse hemos pasado de describir una estructura *infinita* a una *finita*, y que, por lo tanto, la *prueba* (en el sentido de Chateaubriand) no es la misma. Sin embargo, si el análisis ofrecido es aceptable, podríamos decir que hablar de una estructura infinita (y violentar así nuestro concepto de prueba) es *innecesario*.

A todo esto, podría decirse también que la mera presentación de los ejemplo de Chateaubriand, muestra la independencia o el hiato entre las prácticas demostrativas y la meta-teoría clásica. Sin embargo, a esto podríamos responder diciendo que la "elasticidad" de los métodos formales permite (si se acepta el análisis presentado) acortar la distancia. En todo caso, la deficiencia del método formal *per se* no es del todo clara. Pero esto tampoco es un alegato a favor de que la práctica adquiera su justificación sólo en virtud de la posibilidad de una *reconstrucción racional* de la misma. El espíritu de este trabajo es, más bien, afirmar que se pueden alcanzar progresos cuando interactúan ambos énfasis. Después de todo, el análisis de la práctica no debe dejar de lado la evaluación de los métodos y conceptos matemáticos.[18]

18 Un punto de vista análogo está en (LassalleCasanave; 1999).

Referências bibliográficas

Baker, S. Ireland, A; Smaill, A. *On the use of constructive omega-rule within automated deduction*, en Voronkov (ed.), pp. 214-225.

Bundy, A.; Jamnik, M.; Fugard, A. *What is a Proof?* Phil. Trans. R. Soc. (2005).

Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press; 2da edition, 2001.

Chateaubriand, O. *Logical Forms. Part II: Logic, Language and Knowledge*. Campinas: UNICAMP, (Coleção CLE, v. 42), 2005.

Chateaubriand, O. *Proof and explication: response to José Seoane*, *Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 2008, pp. 293-197.

Lassalle Casanave, A. *La concepción de la demostración de Oswaldo Chateaubriand*, *Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 1999, pp. 95-107.

Lassalle Casanave, A. *Entre la retórica y la dialéctica*, *Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 2008, pp. 11-18.

Porto, A. *Formalization and infinity*, *Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 2008, pp. 25-43.

Ferrari, L. *El concepto de demostración y algunas de sus problemáticas*, *Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 2008, pp. 671-692.

Seoane, J. *Elucidando el concepto de demostración. Observaciones sobre Chateaubriand, Manuscrito*, (CLE/UNICAMP), 2008, pp. 279-292.

Tarski, A. *"On the Concept of Logical Consequence",* pp. 409-420 *en* TARSKI, A. (1983).

Tarski, A.*: Logic, Semantics, Metamathematics 2nd ed. Indianapolis: Hackett Publishing, 1983.*

Voronkov, A. (ed.). *Logic programmed and automated reasoning. International conference LPAR '92 St. Petersburg, Russia, July 15-20, 1992.* Spinger-Verlag.

Wittgenstein, L. *Observaciones sobre los Fundamento de la Matemática*, Alianza Editorial, 1987.