nota

Abel Lassalle Casanave*

Arte Geométrica[1]

Resumen

*En algunos pasajes del **Tratado** Hume hace una serie de objeciones a la precisión y exactitud de la geometría, llegando inclusive a afirmar que la geometría es una arte, no una ciencia. En el **Tratado**, para Hume, son solamente exactas la aritmética y el álgebra, pero en la **Investigación** la posición de Hume es decididamente más convencional. En efecto, la distinción entre proposiciones (exactas) de relaciones de ideas y de cuestiones de hecho, psicologismo al margen, recuerda tanto la dicotomía leibniziana entre verdades de razón y de hecho como, más contemporáneamente, el dualismo analítico-sintético: en la **Investigación**, además de las proposiciones de la aritmética y del álgebra, entre las proposiciones exactas de relaciones de ideas están también las proposiciones de la geometría. Ahora bien, con una mejor comprensión del rol de las figuras en las demostraciones geométricas, fruto de recientes investigaciones sobre el tópico, examinaremos en este breve trabajo los argumentos de Hume contrarios a la exactitud de la geometría para mostrar porqué son incorrectos.*

Palavras-chave: filosofía de la geometría; exactitud; D. Hume.

Abstract

*In some passages of the **Treatise**, Hume makes a number of objections to the exactness of geometry, reaching even to say that geometry is an art and not a science. In the **Treatise**, for Hume, (exact) sciences are only arithmetic and algebra, but in the **Enquiry**, Hume's position is decidedly more mainstream. Indeed, the distinction between (exact) propositions of relations of ideas and propositions of matters of fact, psychologism aside, recalls both the Leibnizian dichotomy between truths of reason*

---

* Professor do Depto. de Filosofia da Universidade Federal da Bahia (UFBA).

1 Este trabajo fue financiado por el CNPq (subsidio N° 304660/2010-8).

and truths of facts and, more contemporaneously, the analytic-synthetic dualism: in the ***Enquiry****, in addition to propositions of arithmetic and algebra, among the exact propositions of relations of ideas there are also the propositions of geometry. Now, with a better understanding of the role of figures in geometrical proofs, resulting from recent research on the topic, in this brief paper we will examine Hume's arguments against the exactness of geometry to show why they are wrong.*

Keywords: philosophy of geometry; exactness; D. Hume.

I. Introducción

En algunos pasajes alarmantes de la Sección IV de la Parte II del *Tratado* Hume hace una serie de objeciones a la precisión y exactitud de la geometría:

Cuando la geometría establece una conclusión relativa a las proporciones de cantidad no debemos buscar en ello la máxima precisión *y exactitud. Ninguna de sus pruebas llega a tanto. Esa ciencia toma correctamente las dimensiones y proporciones de las figuras, pero lo hace de un modo tosco, y permitiéndose alguna libertad. Sus errores no son nunca considerables, y ni siquiera los tendría en absoluto si no aspirara esa ciencia a una completa perfección.* (Hume 1984, p. 140.)

En otros pasajes no menos alarmantes de la Sección I de la Parte III, donde Hume recapitula los resultados de la sección precedente, llega inclusive a afirmar que la geometría es un arte, no una ciencia:

> *Ya he indicado que la geometría, arte por el que determinamos las proporciones de las figuras, a pesar de superar con mucho en universalidad y exactitud a los vagos juicios de los sentidos y la imaginación, no alcanza jamás la precisión y exactitud perfectas.* (Hume 1984, p.173)

En el *Tratado*, para Hume, solamente son exactas la aritmética y el álgebra, pero en la *Investigación* la posición de Hume es decididamente más convencional. En efecto, la distinción entre proposiciones (exactas) de relaciones de ideas y proposiciones de cuestiones de hecho, psicologismo al margen, recuerda tanto la dicotomía leibniziana entre verdades de razón y de hecho como, más contemporáneamente, el dualismo analítico-sintético. Y ahora entre las proposiciones exactas de relaciones de ideas están también, además de las de la aritmética y las del álgebra, las proposiciones de la geometría.

Hume retira sin convicción de la *Investigación* sus argumentos acerca de la inexactitud de la geometría. Desde esta perspectiva, el celebrado "tenedor de Hume" es más un recurso de apuro para evitar conclusiones escandalosas – por ejemplo: la geometría es un arte – que una tesis innovadora. Se sabe inclusive que Hume pensó en una versión revisada de los argumentos del *Tratado* que nunca llegó siquiera escribir[2]. Con una mejor comprensión del rol de los diagramas en las pruebas geométricas, fruto de recientes investigaciones sobre el tópico, examinaremos los argumentos de Hume contrarios a la exactitud de la geometría para mostrar que son incorrectos.

II. Los argumentos

A fuer de verdad, Hume da uno sólo y el mismo argumento: las igualdades que establece la geometría no pueden ser exactas porque no hay criterio de igualdad para líneas (rectas o curvas), ángulos y figuras en general. La situación en la aritmética es esencialmente diferente: dos cantidades son iguales si y solamente si hay una correspondencia biunívoca entre ambas. Este es el famoso "principio de Hume" que Frege usará en su reducción de la aritmética a la lógica y ninguno semejante a éste habría en geometría. Luego, cuando se demuestra que dado un segmento se puede construir un triángulo con tres lados iguales al segmento dado – la proposición I.1 de los *Elementos* – o que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos – la proposición I.32 – esas proposiciones son inexactas.

Hume pregunta a los matemáticos cuál es el criterio para decidir si una línea o superficie es igual, mayor o menor que otra. Los divide en dos "sectas", la de aquellos que sostienen que la extensión está compuesta de puntos indivisibles y la de aquellos que la piensan compuesta de cantidades divisibles al infinito. Aunque sean pocos, dice Hume, los primeros tienen la "más aguda y correcta" pero también completamente inútil respuesta. La agudeza consiste en declarar que líneas y superficies son iguales cuando los números de puntos son iguales en cada una –aunque tal vez mejor sería decir que son equinuméricos; su inutilidad consiste en que los puntos que constituyen líneas o superficies son tan minúsculos y están tan confundidos que nunca se podría hacer el cómputo necesario – o establecer la correspondencia biunívoca en cuestión. Ya en relación a los que piensan la extensión como divisible *in infinitum*, según Hume, no pueden obviamente dar la misma respuesta ni pueden tampoco responder que se trataría de computar las partes componen-

2 Según informa Félix Duque en la nota de pie de página 46 de Hume (1984).

tes, pues, dado que líneas o superficies contendrían el mismo número infinito de partes, y dado que los números infinitos no pueden ser ni iguales ni desiguales entre sí,[3] la igualdad o desigualdad en cuestión no puede depender del dicho número infinito de las partes.

Para Hume, "la única noción útil de igualdad o desigualdad se deriva de la apariencia unificada y global, y de la comparación con objetos particulares." (Hume 1984, p. 144) Así, es dudoso saber cuando dos figuras son iguales o desiguales, si una línea es recta o curva, pues se comparan líneas con el falible juicio de los sentidos; y esa comparación se puede a lo sumo corregir por alguna medida común como, por ejemplo, una regla o un compás. Y agrega:

> *En vano recurriríamos al tópico de siempre: suponer una divinidad cuya omnipotencia nos capacitara para formar una figura geométrica perfecta, y para describir una recta sin curva ni inflexión alguna. Como el criterio último* [de igualdad] *de estas figuras no se deriva sino de los sentidos y de la imaginación, es absurdo hablar de una perfección superior a aquella que estas facultades pueden juzgar, pues la verdadera perfección de una cosa consiste en su conformidad con su criterio.* (Hume 1984, p. 149.)

Finalmente, Hume objeta, cerca del fin de la sección IV de la Parte II de la cual hemos extraído su argumento, la certeza de los principios geométricos mismos y por consecuencia de sus demostraciones. En particular, Hume objetará las demostraciones de la divisibilidad infinita de la extensión basadas en el llamado "punto de contacto" – de un círculo con una recta – pero hace una concesión al respecto del uso de diagramas por parte de los matemáticos que nos interesa destacar:

> *Ya sé que no hay matemático que no se niegue a ser juzgado por los diagramas que describe sobre el papel, porque estos – aducirá – son malos bosquejos que sirven únicamente para transmitirnos con mayor facilidad ciertas ideas, que son el verdadero fundamento de nuestro razonamiento.* (Hume 1984, p. 151.)

Los contra-argumentos de Hume al respecto de la divisibilidad infinita del espacio no nos interesan, pero si el contraste entre las inútiles figuras perfectas que trazaríamos con la ayuda de la divinidad – o de la imaginación transcen-

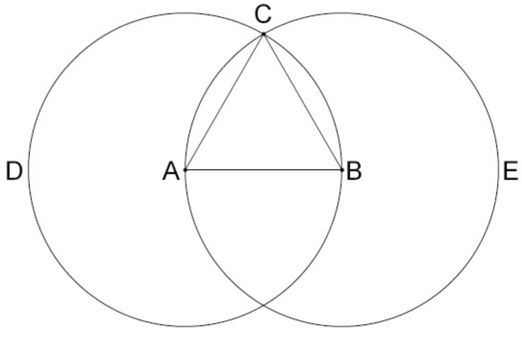
3 Y que Cantor no había ni siquiera nacido.

dental – y los malos bosquejos de una mano trémula. La contraposición ilustra la falta de adecuada comprensión acerca del estatuto de los diagramas y su rol en una demostración. Y esa falta de comprensión explica, como veremos a seguir, el error de Hume.

3. La refutación

Euclides comienza sus *Elementos* enunciando en secuencia definiciones, postulados y nociones comunes. Un postulado – el primero –autoriza trazar una línea recta de un punto a cualquier otro; otro – el tercero – a describir un círculo con cualquier centro y distancia. Con anterioridad a los postulados establece una serie de definiciones de conceptos geométricos (punto, línea, línea recta, ángulo plano, figura, círculo, etc.). La definición 15, por ejemplo, reza: "círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí".[4] Después de los postulados enuncia las llamadas nociones comunes, la primera de las cuales dice: Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí. Luego prueba su primera proposición: Construir un triángulo equilátero sobre una línea recta finita dada.

La prueba es bien conocida. Sea AB la recta finita dada. Con centro en A y la distancia AB descríbase, por el Postulado 3, el círculo BCD; con centro B y distancia BA descríbase, por el mismo postulado, el círculo ACE. Y donde los círculos se cortan, trácense las rectas CA, CB por el Postulado 1.



4 Cf. Euclides (2007).

Pero AC es igual a AB por la definición de círculo y, por la misma razón, BC es igual a BA. Como CA es igual a AB, CA y CB son iguales a AB. Y como por la Noción Común 1, cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí, CA es también igual a CB, luego CA, AB, BC son iguales entre sí. Por lo tanto, el triángulo ABC es equilátero.

La prueba tiene una parte textual y una diagramática. ¿Cuál es la contribución de cada una de esas partes en la prueba? Si estuviéramos a fines del siglo XIX o en el XX la respuesta sería que el diagrama no debería contribuir en nada; más aún, debe ser eliminado de la prueba para evitar que seamos engañados por la intuición. La verdadera prueba consistiría en una secuencia de fórmulas – por lo tanto, inclusive en lenguaje simbólico y no natural – tal que cada una de las fórmulas de la secuencia es o bien un axioma (o postulado) o bien se sigue de fórmulas anteriores en la secuencia por una regla de inferencia. Como vemos, esta definición excluye *per se* el recurso a diagramas como constitutivos de una prueba o demostración.

Pero esta versión estándar (lingüística, homogénea) de prueba ha sido puesta en jaque por la literatura reciente en el sentido de que las mismas sean caracterizadas con exclusividad de esa manera. En particular, con esto se hace justicia al hecho palmario de que las pruebas de Euclides han pasado básicamente incólumes en más de 2000 años, al hecho de que a Euclides nunca lo engaño la intuición. Pero la introducción de un concepto más amplio de prueba (no exclusivamente lingüístico, heterogéneo) exige responder justamente la pregunta anteriormente formulada: ¿cuál es la contribución del texto y cuál la del diagrama en una prueba como I.1? En un brillante trabajo, Ken Manders ha dado la respuesta a esta pregunta. No puedo aquí dar una idea completa de las tesis de Manders sino solamente de la mínima parte necesaria para refutar el argumento de Hume[5].

Comencemos con la contribución del texto. La primera de ellas consiste en introducir elementos diagramáticos: la recta finita AB, dos círculos con centros respectivos A y B y distancias AB y BA. Pero – y esto es de la mayor importancia – es el texto que declara que esos elementos son rectas y círculos, esto es, no es el diagrama que me autoriza a decirlo o, dicho de otra manera, no retiro del diagrama la información de esos aspectos que son, como los denomina Manders, *exactos*. Tampoco es del diagrama que obtengo las conclusiones intermediarias de que AB y AC, por un lado, y de que BA y BC, por el otro, son iguales. Nuevamente es el texto – recurriendo a la definición de

5 Ver Manders (2008).

círculo – que permite tales afirmaciones. Así como es el texto – pero ahora a través de una noción común – el que también permite establecer que AC y BC son iguales. En palabras de Manders, todos esos aspectos son también *exactos*. Y cuando se trata de aspectos exactos – hay otros además de los ya mencionados– *siempre* es el texto el que los establece.

Ahora bien, ¿no significa esto que los diagramas son eliminables?, ¿qué las pruebas en verdad son puramente verbales?, ¿qué los diagramas "son malos bosquejos que sirven únicamente para transmitirnos con mayor facilidad ciertas ideas que son el verdadero fundamento de nuestro razonamiento"? Tal cual la prueba es, esa no podría ser la respuesta, pues hay un paso de ella en el cual recurrimos efectivamente al diagrama, a saber, cuando recurrimos al punto C –aquél de la larga fama – que resulta de la intersección de los círculos. Larga, pero no buena, pues ejemplifica una de las críticas más usuales a los *Elementos*, aquella de la insuficiencia de sus axiomas. En efecto, desde la perspectiva contemporánea, falta un axioma de continuidad que garantice la existencia de C. En una teoría formal con un conjunto suficiente de axiomas, la prueba, aunque no verbal (en lenguaje natural) sino simbólica, sería entonces concluyente. Y así, eliminando el recurso al diagrama, obtenemos una prueba rigurosa sin riesgo de que la "intuición" nos engañe.

Pero Manders llama la atención sobre cuándo y bajo qué condiciones Euclides recurre al diagrama: solamente cuando entran en juego los aspectos del diagrama que él llama *co-exactos*, esto es, aspectos topológicos o mereológicos que resultan del interjuego de las sucesivas entradas de elementos diagramáticos, como, por ejemplo, que los círculos en cuestión se corten determinando *por esa razón* el punto C, esto es, que el punto C *es* la intersección de los círculos, eliminando de esta manera la objeción de que falta un axioma de continuidad, objeción que depende de las teorías actuales del continuo real. Pero, ¿cuál es el criterio para saber cuándo el recurso al diagrama es legítimo o no? La respuesta está en las antípodas de la exigencia de figuras exactas trazadas con la ayuda de Dios o de la imaginación transcendental.

En efecto, la respuesta está en los malos bosquejos, en cuán malos ellos pueden ser. En otras palabras: en la insensibilidad a la deformación. Así, por ejemplo, por peor que dibujemos los círculos en I.1 determinarán aún un punto. ¿Cuál es el límite aquí aceptable de deformidad? Que aquello que dibujemos determine dos regiones, una interior y otra exterior. Ciertamente, a mayor deformación, mayor será la desigualdad que percibimos entre los lados del triángulo, pero justamente esa igualdad es el texto el que la establece, no el diagrama.

Una última observación antes de concluir. Que un punto sea interior o no a un círculo es algo que el diagrama puede informar, pero que un punto sea *centro* del círculo ya no, pues ese es un aspecto exacto. Lo mismo ocurre con el "punto de contacto" entre un círculo y una recta al cual Hume se refiere, esto es, la tangente. Que un punto sea "punto de contacto" es un aspecto exacto, como tal, es el texto, y no el diagrama, el que permite establecer esa afirmación, como el lector podría comprobar examinando, por ejemplo, la demostración de la Proposición III.11 de los *Elementos*.

4. La conclusión

Se podría objetar que le he atribuido un error a Hume porque he olvidado el principio fundamental del *Tratado*: que todas nuestras ideas se originan en impresiones. Pero este principio permitiría concluir en el caso de la geometría que no podemos tener ideas perfectas de círculos o rectas, cosa que se puede tranquilamente conceder, pues cuando se trata de exactitud es el texto la que la establece y cuando se trata de aspectos co-exactos la cuestión es la insensibilidad a la deformación del diagrama y no la exactitud. Por la misma razón no podemos atacar los axiomas de los cuales las demostraciones dependen, pues ellos no juegan un papel demostrativo porque se refieran a lo que veamos o podamos imaginar.

Ahora bien, que nuestras ideas deriven de impresiones es un principio que la *Investigación* comparte con el *Tratado*, pero aún así Hume cambia de posición al respecto de la geometría. Sugiramos un camino posible, además de una concesión al gusto. En primer lugar, Hume aplica el "descubrimiento más notable en la República de las Letras" – la expresión es del *Tratado* –, a saber, la tesis de Berkeley de que la generalidad se obtiene por la vinculación de las ideas siempre particulares con un término general. Se definen los términos geométricos con la condición de que lo definido no sea auto-contradictorio; para los axiomas geométricos se establece una condición semejante, quien sabe agregando en ambos casos una vaga noción de intuitividad. Y todo el resto es raciocinio. Así, después de dividir en la *Investigación* los objetos de la investigación humana en relaciones de ideas y cuestiones de hecho, Hume agrega:

> Que el cuadrado de la hipotenusa es igual al cuadrado de los lados *es una proposición que expresa la relación entre estas partes del triángulo.* Que tres veces cinco es igual a la mitad de treinta *expresa una relación entre estos números. Las proposiciones de esta clase pueden descubrirse por*

> *la mera operación del pensamiento, independientemente de lo que pueda existir en cualquier parte del universo. Aunque jamás hubiera habido un círculo o un triángulo en la naturaleza, las verdades demostradas por Euclides conservarían para siempre su certeza y evidencia.* (Hume, 1980, pp. 47-48.)

La tesis, como ya dijimos, es aquí bien más convencional. Y en líneas generales, de acuerdo con tesis de un Descartes o un Leibniz. Si uno examina la contraposición entre proposiciones de relaciones de ideas y cuestiones de hecho, la semejanza con Leibniz, psicologismo al margen también, es aún mayor: básicamente resulta en la distinción entre verdades de razón y verdades de hecho. En efecto, las proposiciones de cuestiones de hecho ni son encontradas de la misma manera que las proposiciones de relaciones de ideas ni la evidencia de su verdad es la misma. Y, además:

> *Lo contrario de cualquier cuestión de hecho es, en cualquier caso, posible, porque jamás puede implicar una contradicción, y es concebido por la mente con la misma facilidad y distinción que si fuera totalmente ajustado a la realidad.* (Hume, 1980, p. 48.)

En resolución: si yo hubiera olvidado el principio acerca del origen de nuestras ideas, Hume también quiso olvidarlo en la *Investigación*. Aunque no haya encontrado las mejores razones para rechazarla, la tesis del *Tratado* acerca de la geometría está errada. Pero Hume erró donde muchos otros erraron, antes y después, así que no habría que cargar mucho las tintas en ello.

Referências Bibliográficas

Euclides (2007). *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos.

Hume, D. (1984). *Tratado de la naturaleza humana*. Buenos Aires: Hyspamérica.

Hume, D. (1980). *Investigación sobre el conocimiento humano*. Madrid: Alianza

Manders, K. (2008). "The Euclidean Diagram". In: P. MANCOSU (ed.): *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press, 2008, pp. 80-133.