

Nomes para Ordinais : Além da Hierarquia de Veblen

Nicolau C. Saldanha¹

0. Introdução

Neste trabalho damos nomes para ordinais (infinitos enumeráveis « pequenos ») de uma forma muito explícita e construtiva. Esta notação é uma generalização da Hierarquia de Veblen ([V]). Vemos também como relacionar esta notação com os dilatadores de Girard (« *dilators* », [G] e [GV]).

Este artigo foi motivado por algumas idéias do autor que interessaram a algumas pessoas, especialmente a Luiz Carlos Pereira, a quem o autor gostaria de agradecer pela ajuda e estímulo. Não há, entretanto, muito de realmente original aqui e este artigo deve ser visto como uma exposição, talvez sob um ponto de vista diferente, de resultados conhecidos ou de generalizações destes. O autor recebe apoio contínuo do CNPq e da FINEP.

1. A hierarquia de Veblen

A Forma Normal de Cantor diz que qualquer ordinal α pode ser escrito de uma única maneira como :

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \dots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot n_{m-1}$$

onde $\alpha_0 > \dots > \alpha_{m-1}$ são ordinais, m é um natural e n_i , $0 \leq i < m$, são naturais não nulos. Se quisermos usar a Forma Normal de Cantor para dar nomes a ordinais teremos problemas quando chegarmos a ordinais α com

$$\alpha = \omega^\alpha.$$

¹ Departamento de Matemática da PUC-RIO.

Ou seja, a Forma Normal de Cantor nos ensina como dar nomes a todos os ordinais menores do que o primeiro tal α , que é chamado ε_0 .

Podemos pensar em estender a Forma Normal de Cantor dando nomes aos ordinais α satisfazendo $\alpha = \omega^\alpha$. É fácil ver que a classe dos tais α é *fechada* (no sentido que o supremo de um conjunto de elementos da classe pertence à classe) e *ilimitada* (isto é, contém ordinais arbitrariamente grandes). Podemos agora denominar os elementos desta classe $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\omega, \dots$. Com esta nova notação temos nomes para todos os ordinais menores do que o primeiro α com $\alpha = \varepsilon_\alpha$. A classe dos tais α também é fechada e ilimitada e seus elementos podem ser denominados, digamos, $\delta_0, \dots, \delta_\omega, \dots$.

É fácil ver que poderíamos repetir este processo com novas letras, mas ao invés de usar todo o alfabeto grego podemos fazer algo um pouco melhor. Mas, antes de continuar, algumas considerações mais gerais. Chamaremos uma função de On em On estritamente crescente com imagem fechada ilimitada de uma função *normal*. Temos assim uma correspondência óbvia entre classes fechadas ilimitadas e funções normais, que associa a cada função a sua imagem. Como nos exemplos acima, a classe dos pontos fixos de uma função normal é fechada ilimitada, sendo portanto a imagem de uma outra função normal. Chamaremos a esta nova função normal de *derivada* da primeira, e escreveremos f' para a derivada de f . Assim, nos exemplos acima temos $\exp' = \varepsilon$ e $\exp'' = \delta$, onde $\exp(\alpha) = \omega^\alpha$. Mas é claro que podemos repetir este processo de derivar α vezes. Explicitamente, teríamos

$$x \in \text{Im}(f^{(\alpha)}) \Leftrightarrow x = f^{(\beta)}(x) \text{ para todo } \beta < \alpha.$$

Escreveremos $f^{(\beta)}(\alpha)$ como $f(\beta, \alpha)$. A melhor maneira de estender a Forma Normal de Cantor deveria agora ser evidente: escrevemos uma potência de ômega α na forma $\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0)$ onde $\beta_0 < \alpha$.

Antes de continuar, vamos olhar com um pouco mais de cuidado para aquilo que já temos. A Forma Normal de Cantor é equivalente à observação que, para todo ordinal α , existem únicos β e γ com

$$\alpha = \omega^\beta + \gamma, \quad \gamma < \omega.$$

Isto não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta = \alpha$. O problema de dar nomes a ordinais, assim, se reduz ao problema de dar nomes às potências de ω . Nossa nova notação diz que todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0), \quad \beta_0 < \alpha.$$

Isto, é claro, não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta_1 = \alpha$. Aliás, é impossível ter um sistema para dar nomes para todos os

ordinais, ou mesmo para todos os ordinais enumeráveis, pois, qualquer que seja a notação, o conjunto de nomes é enumerável enquanto o conjunto de ordinais enumeráveis é não enumerável.

A maneira de prosseguir deve ser evidente : temos de utilizar mais índices. Ou seja, devemos definir $f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$. Observe que para toda função normal e para todo α temos $f(\alpha, 0) \geq \alpha$. A classe dos α para os quais $\alpha = f(\alpha, 0)$ é sempre fechada e ilimitada. Esta será a imagem de $f(1, 0, \bullet)$. A partir deste exemplo a definição seguinte deve ser natural :

$$x \in \text{Im}(f(\alpha_2, \alpha_1, \bullet)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\alpha_2, \beta_1, x) \text{ para todo } \beta_1 < \alpha_1 \\ \text{e} \\ x = f(\beta_2, \beta_1, x) \text{ para todo } \beta_2 < \alpha_2 \text{ e } \beta_1 < x. \end{cases}$$

Em outras palavras,

$x = f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) \Leftrightarrow x$ é o menor ordinal satisfazendo as condições abaixo :

$$\begin{cases} x > f(\alpha_2, \alpha_1, \beta_0) \text{ para todo } \beta_0 < \alpha_0 \\ \text{e} \\ x > f(\alpha_2, \beta_1, \beta_0) \text{ para todo } \beta_1 < \alpha_1 \text{ e } \beta_0 < x \\ \text{e} \\ x > f(\beta_2, \beta_1, \beta_0) \text{ para todo } \beta_2 < \alpha_2, \beta_1 < x \text{ e } \beta_0 < x \end{cases}$$

Assim, todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_2, \beta_1, \beta_0), \quad \beta_0, \beta_1 < \alpha.$$

Isto ainda não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter $\beta_2 = \alpha$.

Podemos generalizar isto da seguinte forma : consideraremos $\mathbf{b}_\gamma, \dots, \mathbf{b}_\gamma, \dots$ uma família de ordinais onde apenas um número finito destes \mathbf{b}_γ é diferente de zero. Uma tal família pode ser escrita como

$$\mathbf{b} = (\gamma \rightarrow \mathbf{b}_\gamma, \dots, 0 \rightarrow \mathbf{b}_0)$$

onde poderemos omitir os termos da forma $\gamma \rightarrow 0$. Usaremos também a notação

$$\mathbf{b} = \theta^\gamma \cdot \mathbf{b}_\gamma + \dots + \mathbf{b}_0$$

para esta família onde θ é um símbolo formal; omitimos o termo θ^0 no último termo pois pensamos nele em algum sentido como sendo igual a 1. Podemos definir

$$x \in \text{Im}(f(\dots, \gamma \rightarrow a_\gamma, \dots, \bullet)) \Leftrightarrow x = f(\dots, \gamma \rightarrow b_\gamma, \dots, 0 \rightarrow x)$$

para toda família \mathbf{b} com $b_0 = x$ e para a qual exista $\delta > 0$ com

$$\begin{cases} b_\gamma = a_\gamma \text{ para todo } \gamma > \delta \\ b_\gamma < a_\gamma \text{ para } \gamma = \delta \\ b_\gamma < x \text{ para todo } 0 < \gamma < \delta. \end{cases}$$

Em outras palavras, $x = f(\mathbf{a})$ é o menor ordinal satisfazendo a seguinte condição : para toda família \mathbf{b} para a qual existe um δ com

$$\begin{cases} b_\gamma = a_\gamma \text{ para todo } \gamma > \delta \\ b_\gamma < a_\gamma \text{ para } \gamma = \delta \\ b_\gamma < x \text{ para todo } \gamma < \delta \end{cases}$$

temos $x > f(\mathbf{b})$. A aparição freqüente de condições como esta justifica a definição

$$\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b_\gamma = a_\gamma \text{ para todo } \gamma > \delta \\ b_\gamma < a_\gamma \text{ para } \gamma = \delta \\ b_\gamma < x \text{ para todo } \gamma < \delta. \end{cases}$$

Assim, $f(\mathbf{a})$ é o menor ordinal satisfazendo

$$\mathbf{b} \prec_{f(\mathbf{a})} \mathbf{a} \Rightarrow f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}).$$

Por indução transfinita sobre $\gamma_{n-1} \rightarrow a_{\gamma_{n-1}}, \dots$, vemos facilmente que

$$f(\dots, \gamma_n \rightarrow a_{\gamma_n}, \gamma_{n-1} \rightarrow a_{\gamma_{n-1}}, \dots) = f(\dots, \gamma_n \rightarrow a_{\gamma_n}, (\gamma_{n-1} \rightarrow a_{\gamma_{n-1}}, \dots)).$$

Assim, todo α potência de ω pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\mathbf{b}), \quad b_\gamma < \alpha \text{ para todo } \gamma.$$

Poderia parecer agora que temos nomes para todos os ordinais : afinal, basta escrever α na notação acima já que podemos supor conhecidos nomes para os b_γ . O problema, é claro, é que podemos não ter nomes para os γ . Mais precisamente, podemos ter

$$\alpha = \exp(\alpha \rightarrow 1).$$

Esta notação descrita até aqui é, com leves modificações a Hierarquia de Veblen.

2. Além

Vimos que sabemos dar nomes aos ordinais menores do que o primeiro α com $\alpha = \exp(\alpha \rightarrow 1)$. Analogamente, dada uma função normal f podemos considerar os α com $f(\alpha \rightarrow 1) = \alpha$. A classe dos tais α é fechada e ilimitada e podemos definir uma nova função normal g como

$$x \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow f(x \rightarrow 1) = x.$$

A semelhança entre esta definição e a definição de derivada vista anteriormente é evidente. Escreveremos $g(x) = f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, x)$ e

$$f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, \dots, \gamma \rightarrow a_\gamma \dots) = f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, (\dots, \gamma \rightarrow a_\gamma \dots)),$$

propriedade análoga àquela vista anteriormente e que justifica a notação. Vamos agora unificar e generalizar estas definições.

Queremos definir $f(a)$ para algum tipo mais geral de objeto a . Sabíamos desde o início o que significava $f(\alpha)$, onde $\alpha \in \text{On}$. Aprendemos na seção anterior a definir $f(a)$ onde a é uma família de ordinais indexada por ordinais que assume valores diferentes de zero apenas um número finito de vezes. Mas o conjunto das funções de β em α com esta propriedade identifica-se naturalmente com α^β , exponenciação ordinal. Podemos assim dizer que aprendemos a definir $f(a)$ para $a \in \text{On}^{\text{On}}$; observe que On é identificado com um « segmento inicial » de On^{On} e que nossas definições respeitam esta identificação. (O leitor que estiver preocupado com a legitimidade de falar de On^{On} pode substituir todas as instâncias de On por κ , um cardinal suficientemente grande, fazendo as adaptações evidentes.)

Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto bem ordenado qualquer, definimos A^A como o conjunto das funções de A em A que só assumem valores diferentes de 0 (o mínimo de A) um número finito de vezes. O conjunto A^A recebe uma boa ordenação natural e podemos identificar A com um segmento inicial de A^A identificando a com $(0 \rightarrow a)$. Podemos agora considerar $A^{(A^A)}$ e identificar A^A com um segmento inicial deste conjunto a partir da identificação anterior. Podemos prosseguir com este processo e definir

$$\varepsilon(A) = A \cup A^A \cup A^{(A^A)} \cup \dots$$

de tal forma que um elemento a de $\varepsilon(A)$ é (a menos de identificações naturais) uma função de $\varepsilon(A)$ em A . Observe ainda que, se sabemos dar nomes para os elementos de A , temos uma forma evidente de dar nomes para os elementos de $\varepsilon(A)$. Observe ainda que se $B \subseteq A$, então $\varepsilon(B) \subseteq \varepsilon(A)$, mas $\varepsilon(B)$ não será um segmento inicial de $\varepsilon(A)$ mesmo se B for um segmento inicial de A .

Queremos assim definir $f(a)$ para $a \in \varepsilon(\text{On})$. Definiremos $f(a)$ como o menor ordinal satisfazendo

$$b \prec_{f(a)} a \Rightarrow f(b) < f(a).$$

Resta-nos ainda definir $b \prec_x a$ neste novo contexto. Definamos $a \mid b$ por

$$(a \mid b)(c) = \begin{cases} a(c), & \text{se } c < b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$b \prec_x a \Leftrightarrow \text{existe } c \text{ com } \begin{cases} b(d) = a(d), & \text{para } d > c \\ b(c) < a(c) \\ b \mid c \in \varepsilon(x). \end{cases}$$

É fácil verificar que todas estas definições funcionam bem. A seguinte definição é equivalente à anterior : $f(a)$ é o menor ordinal x com a propriedade que $a \in \varepsilon(x + 1)$ e para todo b com $b < a$ e $b \in \varepsilon(x)$ temos $f(b) < x$. Aqui $b < a$ significa simplesmente que existe d com $b(c) = a(c)$ para $c > d$ e $b(d) < a(d)$.

Isto nos dá nomes para ordinais bem maiores do que aqueles alcançáveis pela Hierarquia de Veblen. O menor ordinal não alcançável pela Hierarquia de Veblen é $\exp((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1)$ enquanto o menor ordinal não alcançável pela nossa notação é o menor α com $\alpha = \exp(\dots(\alpha \rightarrow 1) \rightarrow \dots \rightarrow 1)$ para qualquer número de níveis. Também podemos escrever este ordinal como

$$\alpha = \sup\{\exp(1), \exp(1 \rightarrow 1), \exp((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1), \dots\}.$$

3. Dilatadores

Definimos a categoria ON como sendo a categoria cujos objetos são ordinais e cujos morfismos entre α e β são funções estritamente crescentes de α para β . Existe uma outra categoria intimamente ligada a esta : a categoria de todos os conjuntos bem ordenados onde morfismos são funções estritamente crescentes. Definimos (segundo [G]) um *dilatador* como sendo um funtor de ON em ON que preserva limites diretos e *pull-backs*. Já vimos exemplos de dilatadores como $F(A) = A^A$ ou $F(A) = \varepsilon(A)$; a Forma Normal de Cantor tem um parentesco próximo com o dilatador ε .

Pensaremos em $F(\text{On})$ como a união dos $F(\alpha)$ pela identificação obtida a partir das inclusões de α como um segmento inicial de β . Assim, $F(\text{On})$ pode

ser considerado uma classe bem ordenada. Denotaremos o elemento típico de $F(\text{On})$ por a ou uma letra semelhante; claramente, $a \in F(\text{On})$ significa simplesmente que $a \in F(\alpha)$ para algum α .

Assim, se F é um dilatador e $a \in F(\text{On})$ definimos $f(a)$ como sendo o menor ordinal x com $a \in F(x+1)$ e $f(b) < x$ para todo $b \in F(x)$ com $b < a$. As seções precedentes correspondem a fazer isso com o dilatador ε .

Podemos agora pensar em toda nossa construção anterior sob o seguinte aspecto. Tínhamos inicialmente nomes para os naturais. Usando o dilatador ε para criar índices, construímos nomes para um conjunto de ordinais, ou, o que é equivalente, criamos um conjunto bem ordenado de nomes. Ou seja, a partir de um dilatador (ε) exibimos um processo para, a partir de um conjunto bem ordenado (ω), construir outro conjunto bem ordenado (o conjunto de nomes). Obtivemos assim, a partir de um dilatador um outro funtor de ON em ON ; é de verificação imediata que este novo funtor é um dilatador. Denotaremos este novo funtor por $F^{(1)}$; descrevemos, portanto, nas últimas seções $\varepsilon^{(1)}(\omega)$.

Diremos que um dilatador F é *recursivo* se podemos dar nomes recursivamente aos elementos de $F(\alpha)$ a partir de nomes para elementos de α . Se F é recursivo, $F^{(1)}$ também é recursivo. Podemos além disso iterar este processo para definir um dilatador $F^{(\gamma)}$ para qualquer ordinal γ . Se α e F forem recursivos, o dilatador $F^{(\alpha)}$ também será recursivo. Temos assim facilmente nomes para ordinais até o primeiro α com

$$\alpha = \varepsilon^{(\alpha)}(\omega).$$

Poderíamos prosseguir além desse ponto com novas iterações mas acreditamos já ter ficado claro como prosseguir com esse processo. Assim, pararemos nossa construção de nomes para ordinais e de funtores recursivos neste ponto.

Bibliografia :

- [GV] Jean-Yves Girard, Jacqueline Vauzeilles, *Functors and Ordinal Notations I : A Functorial Construction of the Veblen Hierarchy*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 49 (1984), pp. 713-729.
- [G] Jean-Yves Girard, Π_2^1 -logic I : *Dilatators*, Annals of Mathematical Logic, vol. 21 (1981), pp. 75-219.
- [V] Oswald Veblen, *Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9 (1908), pp. 280-292.