

Sur la décidabilité de la logique du premier ordre monadique en Calcul des séquents

Sobre a decidibilidade da lógica de primeira ordem monádica no cálculo dos sequentes

Résumé

Cet article présente une démonstration syntaxique de la décidabilité de la logique du premier ordre monadique (et corollairement de sa complétude pour les modèles finis). Cette démonstration est obtenue en modifiant, pour l'adapter au cas de la logique monadique, la démonstration du théorème de complétude pour la logique du premier ordre classique due à Ketonen/Schütte (dont la méthode, parfois appelée construction d'un arbre de réfutation, décrit en fait, pour le fragment propositionnel, un algorithme de décision). Alors que dans le cas général, le traitement du quantificateur existentiel, implique la prise en considération d'une infinité de termes, dans le cas monadique, les formules peuvent être mise dans une forme canonique spécifique (H. Behmann, 1922) permettant de borner, pour la réfutation des quantificateurs existentiels, le nombre des termes devant être pris en considération. Décidabilité du cas monadique et complétude de celui-ci pour les modèles finis s'ensuivent.

Mots-clés: décidabilité ; complétude ; logique du premier ordre monadique.

Abstract

In this article, a syntactical proof of decidability of monadic first-order logic (and of its completeness for finite models) is given. The proof is obtained by adapting to the case of monadic logic, the proof given by Ketonen/Schütte for first-order logic completeness (method of “construction of the refutation tree”, which actually describes, for the propositional fragment, a decision algorithm). In the general case (i.e. not restricted to monadic logic), the treatment of

* Université Jean Moulin Lyon 3

existential quantifiers imposes an enumeration of all the terms of the language, treatment that prevents the algorithm's termination, and thus the decision. In the monadic case, however, any formula can be put in a specific canonical form, a result due to H. Behmann (1922), canonical form which implies that only a bounded set of terms have to be taken in consideration. The treatment of existential quantifiers can thus be done with a finite number of terms. Decidability (and completeness for finite models) of the monadic case follows.

Keywords: decidability; completeness; monadic first order logic.

Resumo

Neste artigo apresentamos uma prova sintática de decidibilidade para a lógica monádica de primeira ordem (e de sua completude para modelos finitos). A prova é obtida a partir de uma adaptação ao caso da lógica monádica da prova obtida por Ketonen/Schütte para a completude da lógica de primeira ordem (método de "construção da árvore de refutação", que realmente descreve, para o fragmento proposicional, um algoritmo de decisão). No caso geral (isto é, não restrito à lógica monádica), o tratamento dos quantificadores existenciais impõe uma enumeração de todos os termos da linguagem, tratamento que impede a terminação do algoritmo e, portanto, a decisão. No caso monádico, no entanto, qualquer fórmula pode ser colocada em uma forma canônica específica, um resultado devido a H. Behmann (1922), forma canônica que implica que apenas um conjunto limitado de termos deve ser levado em consideração. O tratamento dos quantificadores existenciais pode assim ser feito com um número finito de termos. A decidibilidade (e completude para modelos finitos) do caso monádico pode assim ser obtida.

Palavras-chave: decidibilidade ; completude ; lógica de primeira ordem monádica.

1. Définitions et rappels

1.1 Formules et dualité

Dans cet article l'ensemble des formules (du premier ordre, sans constantes de fonctions) considéré est l'ensemble des formules usuel quotienté par les "lois de de Morgan". Un peu plus précisément, il s'agit :

- du sous-ensemble de l'ensemble des formules habituel comprenant seulement celles en forme normale relativement aux réécritures fondées sur ces équivalences permettant de limiter la portée des négations aux sous-formules atomiques
- mais où, en outre, le connecteur unaire de négation est supprimé du langage, au profit d'une relation binaire de dualité définie.

Pour définir ces formules avec précision, on commence par se donner, pour chaque arité $k \in \mathbb{N}$, un ensemble $\text{Préd}^{(k)} = \{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de (constantes de) prédicats

d'arité k , muni d'une involution $(.)^\perp$ (différente de l'identité) de cet ensemble dans lui même. Le langage considéré ici étant sans constantes de fonctions (pas même de constantes d'individu), l'ensemble des termes t_1 d'individu se réduit donc quant à lui à Var , l'ensemble (dénombrable) des variables d'individu. Sur cette base :

d'une part, on définit inductivement les formules de façon standard (à ceci près que le langage ne comprend pas de négation), par :

$$\phi := P_i t_0 \dots t_k \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \forall x_i \phi \mid \exists x_i \phi$$

d'autre part, on définit inductivement, comme suit, une involution (également notée $(.)^\perp$) de l'ensemble des formules dans lui-même :

1. $(P_i t_0 \dots t_k)^\perp = P_i^\perp (t_0 \dots t_k)$
2. $(\phi \wedge \psi)^\perp = \phi^\perp \vee \psi^\perp$
3. $(\phi \vee \psi)^\perp = \phi^\perp \wedge \psi^\perp$
4. $(\forall x \phi)^\perp = \exists x \phi^\perp$
5. $(\exists x \phi)^\perp = \forall x \phi^\perp$

On vérifie par induction sur ϕ que $(\phi^\perp)^\perp$. On dit que ϕ et ϕ^\perp sont duales l'une de l'autre (que ϕ est la duale de ϕ^\perp et réciproquement). Dans la sous-section suivante, parce que la négation est ici abordée comme relation binaire (de dualité) définie (et non via un connecteur unaire de négation intégré au langage), on est amené, dans la version du calcul des séquents considérée (avec séquents monolatéraux), à remplacer les habituelles contraintes d'identité propres aux habituelles règles axiome et coupure (identité entre des occurrences de formules n'étant pas situées du même côté du signe \vdash) par des contraintes de dualité (entre des occurrences de formules situées du même côté du signe \vdash).

Remarque

La notion de sous-formule d'une formule est définie de façon standard ; attention cependant au fait que la formule $Pt_1 \dots t_k$ n'est pas sous-formule de sa duale

$$P^\perp t_1 \dots t_k$$

2. Rappels sur la logique du 1^{er} ordre monadique

Définition 1

- On dit d'une formule β qu'elle est un *bloc conjonctif*, si elle est de la forme $\bigwedge_{i \in I} \lambda_i$, où, pour tout i , la formule $\lambda_i \in I$ est atomique¹.
- Une formule est *existentielle élémentaire* (\exists -élémentaire), si elle est de la forme $\exists x_k \bigwedge_{i \in I} \lambda_i$, où, pour tout i , la formule $\lambda_i \in I$ est atomique.
- Une formule est *universelle élémentaire* (\forall -élémentaire), si elle est de la forme $\forall x_k \bigvee_{i \in I} \lambda_i$, où, pour tout i , la formule $\lambda_i \in I$ est atomique.
- On dira d'une formule existentielle (resp. universelle) élémentaire qu'elle est normalisée, si pour tous $i, j \in I$ (dans la description ci-dessus), on a en outre :
 - o les formules atomiques présentes sont toutes distinctes (si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$);
 - o deux formules atomiques présentes ne sont jamais duales ;
 - o la variable x_k a au moins une occurrence dans chaque λ_i (pas de quantifications "vides").

¹ La lettre λ choisie pour noter les formules atomiques, l'a été pour faire écho à la notion de littéral, qui, dans un langage sans négation où les prédicats viennent nativement avec un dual, ne se distingue plus de la notion de formule atomique .

Définition 2

Un langage du premier ordre L est dit monadique, si $\text{Préd}(L) \subseteq \text{Préd}^{\langle 1 \rangle}$. On appelle Calcul des prédicats classique monadique (du premier ordre) le calcul des prédicats classique du premier ordre restreint aux langages monadiques. On dit qu'une formule est monadique, si son langage l'est.

Remarque 3

Si ϕ est une formule élémentaire normalisée monadique de L , alors :

$$\phi := \exists x (P_{i_1} x \wedge \dots \wedge P_{i_n} x) \quad \text{ou} \quad \phi := \forall x (P_{i_1} x \vee \dots \vee P_{i_n} x)$$

où les P_{i_k} sont des prédicats unaires deux à deux distincts et non duaux. En particulier, une telle formule ϕ est toujours close.

Remarque 4

Soit L un langage du premier ordre et ϕ une formule de L telle que $\phi := \bigvee_{k \in K} \psi_k$. Pour toute variable x_i , la formule ϕ est équivalente à une formule de la forme :

$$\bigvee_{k \in K_1} \psi_k \vee \bigvee_{k \in K_2} \psi_k$$

- où $K_1 \cup K_2 \subseteq K$ et $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
- où pour tout $k \in K_1$, on a $x_i \notin \psi_k$ et pour tout $k \in K_2$ on a $x_i \in \text{V}_{\text{Lib}}(\psi_k)$
- où pour tous $k, k' \in K_1$ (resp. K_2), $\psi_k \neq \psi_{k'}$ et $\psi_k \neq (\psi_{k'})^\perp$

Démonstration Par des remplacements successifs de sous-formules par des formules équivalentes (en orientant les équivalences correspondant aux propriétés suivantes de \vee : commutativité, associativité, idempotence, absorbance des tautologies, et en changeant si nécessaire le nom des variables liées).

On rappelle maintenant pour nos formules ainsi “de Morganisées”, un résultat ancien² prouvant qu'on peut transformer les formules monadiques en un format standardisé particulier.

2 Selon une note historique de W. Quine à la fin du chapitre 23 de *Methods of Logic*, 1950 (consulté dans sa version française, *W. Quine, Méthodes de Logique*, traduction Maurice

Proposition 5

Soit ϕ une formule en forme prénexe. Si ϕ est monadique, alors il existe une formule ϕ° (resp. ϕ^\bullet) de même langage, telle que $\phi \sim \phi^\circ$ (resp. $\phi \sim \phi^\bullet$) et telle que :

$$\phi^\circ := \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{k \in K} \Theta_{j_k} \quad (\text{resp. } \phi^\bullet := \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K} \Theta_{j_k})$$

où les Θ_{j_k} sont des formules atomiques ou des formules élémentaires normalisées deux à deux distinctes et non duales.

Démonstration Si ϕ est en forme prénexe, on a :

$$\phi := Q_1 x_{i_1} \dots Q_n x_{i_n} \psi$$

où les Q_1, \dots, Q_n sont des quantificateurs et ψ est sans quantificateurs. On démontre le résultat par récurrence sur n .

Si $n=0$, on sait qu'il existe deux formules en forme normale (disjonctive et conjonctive respectivement) sans répétition de formules atomiques (idempotence) et où ces dernières (qu'elles soient conjointes ou disjointes) sont classées selon l'ordre lexicographique, formules équivalentes à ϕ et qui conviennent pour ϕ^\bullet et ϕ° respectivement.

Si $n=m+1$, on a $\phi := Q_1 x_{i_1} \psi$ avec ψ prénexe. On raisonne par cas sur Q_1 selon qu'il s'agit d'un \exists ou d'un \forall . On ne traite ci-dessous que le dernier cas, i.e. celui où $\phi := \forall x_{i_1} \psi$ (l'autre se traitant symétriquement via $(\cdot)^\bullet$). On a :

$$\phi \sim \forall x_{i_1} (\psi)^\circ \quad (\text{par HR sur } \psi)$$

$$:= \forall x_{i_1} \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{k \in K} \Theta_{j_k} \quad (\text{où chaque } \Theta_{j_k} \text{ est élémentaire ou atomique)}$$

Clavelin, Armand Colin, 1972), la description de ces formes normalisées particulières propres au cas monadique remonterait à Heinrich Behmann, "Beitrag zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem", *Mathematische Annalen*, vol 86, p.163-229, 1922 (formes qui s'atteignent cependant via des équivalences repérées dès 1910 dans les *Principia de Whitehead et Russell*, où la mise en forme prénexe des formules est déjà établie). Merci à Luiz Carlos Pereira pour m'avoir communiqué cette référence.

$\sim \bigwedge_{j \in J} \forall x_{i_1} \bigvee_{k \in K} \Theta_{j_k}$ (“distributivité” de \forall sur \bigwedge)

$\sim \bigwedge_{j \in J} \forall x_{i_1} (\bigvee_{j_k \in K_1} \Theta_{j_k} \vee \bigvee_{j_k \in K_2} \Theta_{j_k})$ (K_1, K_2 étant pour x_{i_1} comme dans la remarque 4).

$\sim \bigwedge_{j \in J} (\bigvee_{j_k \in K_1} \Theta_{j_k} \vee \forall x_{i_1} \bigvee_{j_k \in K_2} \Theta_{j_k})$ (car $x_{i_1} \notin \Theta_{j_k}$ pour $j_k \in K_1$).

Il reste alors à remarquer que pour tout $j_k \in K_2$, la formule Θ_{j_k} ne peut être élémentaire (en effet, dire que K_2 est pour x_{i_1} comme dans la remarque 4, c’est dire que x_{i_1} figure libre dans une telle Θ_{j_k} ; or par la remarque 3, de telles formules sont nécessairement closes) et est donc une formule atomique.

En définitive $\forall x_{i_1} \bigvee_{j_k \in K_2} \Theta_{j_k}$ est donc une formule \forall -élémentaire, qui plus est normalisée (par les deux derniers items de la remarque 4).

Rappelons que ce résultat propre au calcul monadique a pour conséquence l’absence fondamentale de complexité du fragment monadique (du point de vue de la classification de la complexité des formules en fonction de l’alternance des quantificateurs). On ne s’étonnera donc pas que le calcul des prédicats monadique soit décidable – ce que nous démontrons à présent par une preuve simple pour le fragment sans coupure d’un calcul des séquents (preuve dont un corollaire est la complétude de la logique monadique pour les modèles finis, complétude dont s’ensuit également l’admissibilité de la règle de coupure, moyennant la correction de la sémantique usuelle pour le système avec coupure).

3. Règles, pré-preuves et preuves

Dans ce qui suit, Γ, Δ etc désignent des ensembles de formules. Envisagé du point de la déduction, un ensemble de formules Γ est appelé un séquent (multi-conclusions et monolatéral) et est noté $\vdash \Gamma$ (bien que l’inclusion du signe \vdash dans la notation de tels séquents soit formellement inutile, on continue de l’inclure, ce qui permet de mieux distinguer multi-ensembles de formules per se et multi-ensembles de formules en tant que nœud dans une dérivation).

On présente maintenant l'« ensemble des règles».

Règle “thèse” (0-aire)

$$\frac{}{\vdash \Gamma} \text{ thèse}$$

Règle “logiques” (non 0-aires)

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi} \wedge$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi} \vee$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[x_k/x_i]}{\vdash \Gamma, \forall x_i \varphi} \forall$$

(x_k non libre dans Γ)

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[t/x_i]}{\vdash \Gamma, \exists x_i \varphi} \exists$$

Règles “structurelles” (non 0-aire)

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}{\vdash \Gamma, \varphi} \text{ ctr}$$

Dans le cas particulier où, dans la règle thèse, le séquent Γ comprend une paire de formules duales, on dit aussi qu'il s'agit d'un axiome dualité :

Axiome dualité

$$\frac{}{\vdash \Delta, \varphi, \varphi^\perp} \text{ ax}$$

Définition 6

L'ensemble des règles de LK comprend :

- la règle 0-aire axiome dualité
- toutes les règles non 0-aires présentées ci-dessus

Définition 7

L'ensemble des pré-preuves est le plus petit ensemble d'arbres (non nécessairement finis) à branchements 0, 1 et 2-aires et à nœuds parmi les séquents, dont les branchements 0, 1 et 2-aires sont parmi les règles présentées ci-dessus (ou encore des "règles" représentant une suite finie des règles présentées ci-dessus, alors figurées par une double ligne, comme dans l'exemple 3 ci-dessous). Le séquent racine d'une pré-preuve est appelé le séquent conclusion de cette pré-preuve.

Exemples (pré-preuves) :

Exemple 1 :

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \hline \text{ctr} \\
 \vdash \varphi, \varphi, \varphi \\
 \hline \text{ctr} \\
 \vdash \varphi, \varphi \\
 \hline \text{ctr} \\
 \vdash \varphi
 \end{array}$$

Exemple 2 :

$$\begin{array}{c}
 \vdash \varphi, \varphi^\perp \qquad \vdash \varphi, \psi^\perp, \chi \\
 \hline \wedge \\
 \vdash \varphi, \varphi, \psi^\perp, \varphi^\perp \wedge \chi \\
 \hline \text{ctr} \\
 \vdash \varphi, \psi^\perp, \varphi^\perp \wedge \chi
 \end{array}$$

Exemple 3 :

$$\frac{\frac{\vdash \varphi, \varphi^\perp, \varphi \wedge \psi \quad \vdash \psi, \psi^\perp}{\wedge} \text{ctr}}{\vdash \varphi, \psi^\perp, \varphi^\perp \wedge \psi}$$

Définition 8

Parmi les pré-preuves, on appelle preuves en LK celles qui sont définies, comme à l'accoutumée, par induction, à partir des règles de LK (le cas de base étant donné par la règle 0-aire axiome dualité).

Observons que toute preuve est une pré-preuve (Ex. 3), mais que toute pré-preuve n'est pas une preuve (Ex. 1 et 2). Il y a exactement deux cas de figure dans lesquels une pré-preuve π n'est pas une preuve, à savoir :

- quand π comporte une branche infinie.
- quand π comporte une branche finie dont l'extrémité est un séquent $\vdash \Delta$ où ne figurent aucune paire de formules duales.

4. Algorithme de décision et complétude

Définition 9

Soit Δ un multi-ensemble non vide de formules ϕ_i de la forme :

$$\phi_i := \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K} \Theta_{j_k}$$

où les Θ_{j_k} sont des formules atomiques ou élémentaires comme décrit dans la

proposition 5. On note $A(\Delta)$, la pré-preuve ayant $\vdash \Delta$ pour séquent conclusion, récursivement engendrée comme suit :

si Δ comprend seulement des formules atomiques ou encore si Δ comprend une paire de formules atomiques duales l'une de l'autre, alors $A(\Delta)$ est la pré-preuve:

_____ thèse
 $\vdash \Delta$

2. sinon,

tant qu'il existe dans Δ une formule non atomique ni existentielle, on en sélectionne une, disons ϕ . C'est donc que $\vdash \Delta$ est de la forme $\vdash \Delta', \phi$

i. si $\phi := \psi \vee \chi$, alors $A(\Gamma)$ est la pré-preuve :

$$\frac{A(\Delta', \psi, \chi)}{\vdash \Delta', \psi \vee \chi} \vee$$

ii. si $\phi := \psi \wedge \chi$, alors $A(\Gamma)$ est la pré-preuve :

$$\frac{A(\Delta', \psi) \quad A(\Delta', \chi)}{\vdash \Delta', \psi \wedge \chi} \wedge$$

iii. si $\phi := \forall x_1 \psi$, alors $A(\Gamma)$ est la pré-preuve :

$$\frac{A(\Delta', \psi[x_k/x_i])}{\vdash \Delta', \forall x_i \psi} \forall$$

(où x_k est une variable fraîche ne figurant pas dans Δ' et librement substituable à x_i dans ψ)

sinon, c'est que Δ comprend seulement (outre, éventuellement, des formules atomiques) des formules existentielles et en comprend au moins une. Soit ϕ l'une d'entre elles. Le séquent $\vdash \Delta$ est donc de la forme $\vdash \Delta', \phi$ avec $\phi := \exists x_1 \psi$. La

pré-preuve $A(\Gamma)$ est alors :

$$\frac{\frac{A(\Delta', \psi[x_{k_0}/x_i], \dots, \psi[x_{k_n}/x_i])}{\text{ctrs}} \exists \text{ (n-times)}}{\vdash \Delta', \exists x_i \psi[x_i]} \exists$$

(où les x_{k_j} sont toutes les variables présentes dans Δ)

Par construction, $A(\Gamma)$ est toujours une pré-preuve. Dans la mesure où chaque clause de l'algorithme, remplace la formule distinguée par une ou des formules de complexité plus faible, il est clair que l'algorithme termine et termine en produisant une pré-preuve finie. De deux choses l'une : soit cette pré-preuve est une preuve, soit elle ne l'est pas et on montre ci-dessous qu'elle décrit alors un contre-modèle du séquent conclusion (et en fait même la démonstration que ce contre-modèle en est un³.)

Remarque 10

Observons que, si Δ est un multi-ensemble non vide de formules ϕ_i de la forme :

$$\phi_i := \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K} \Theta_{jk} \text{ où les } \Theta_{jk} \text{ sont des formules atomiques ou}$$

élémentaires :

1. toute branche B de $A(\Gamma^*)$ (lue de bas en haut) se décompose canoniquement en deux parties :

a) un tronçon initial où toutes les règles non 0-aires “traversées” (en montant) sont des règles réversibles (\wedge, \vee, \forall), tronçon dont le séquent ultime (vers le haut) comprend au moins une formule et seulement des formules atomiques et/ou des formules \exists -élémentaires (éventuellement aucune). On dira de ce séquent qu'il est le séquent central de la branche.

³ Cette méthode est inspirée de la méthode utilisée par Schütte pour démontrer la décidabilité du calcul classique propositionnel et la complétude de la logique du premier-ordre, via des systèmes de calcul des séquents dans lesquels le style des règles est choisi pour maximiser le nombre de règles réversibles (méthode parfois appelée de construction de l'arbre de réfutation). Cf. Schütte, Ein System des verknüpfenden Schliessens, Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 2, p. 55-67, 1956. Notons que selon S.Negri et J. von Plato, Structural Proof Theory, p. 86, l'idée d'une telle méthode avait été antérieurement proposée par O. Ketonen, Predikaattikalkylin täydellisydestä (On the completeness of predicate calculus), Ajatus, vol. 10, pp. 77-92, 1941, sans que ce dernier n'ait toutefois développé les détails de la démonstration. Merci à Alberto Naibo pour cette indication. Pour une présentation synthétique de cette méthode dans le cadre d'un calcul des séquents monolatéral, on peut consulter S. S. Wainer and L. A. Wallen, “Basic Proof Theory”, in S. S. Wainer and P. Aczel and H. Simmons (eds), Proof Theory : A Selection of Papers from the Leeds Proof Theory Programme 1990, Cambridge University Press, 1992, p.3-26.

b) un second tronçon (appelons-le le tronçon terminal : le reste de la branche) dont les seules règles non 0-aires éventuelles sont des “règles \exists ” (en fait des agglomérations de \exists et de contractions) et des règles \wedge .

2. Observons également que les variables présentes (qu’elles soient libres ou liées par un quantificateur existentiel) dans les séquents situés dans le tronçon terminal de cette branche sont exactement les variables présentes dans le séquent central (puisque le tronçon terminal ne comprend aucune règle \forall , en sorte que toutes les instances de règle \exists , toutes situées dans ce tronçon terminal, mobilisent exactement les mêmes variables, à savoir celles présentes dans le séquent central)

Remarque 11

Si $A(\Gamma)$ est une pré-preuve qui n’est pas une preuve en LK, alors il doit exister une branche partant de la racine de $A(\Gamma)$, et dans les séquents de laquelle ne figurent jamais à la fois une formule atomique et sa duale. Le séquent ultime (la feuille) de cette branche est un séquent comprenant seulement des formules atomiques.

Lorsque l’on parcourt cette branche vers le haut, toute formule non atomique ϕ rencontrée dans un séquent s , finit par être “traitée”, i.e. l’une des occurrences de la formule ϕ “ancêtre” de celle considérée dans s (et située plus haut) est formule principale d’une introduction (ou, s’il s’agit d’une formule existentielle, d’une suite agglomérée de \exists -introductions suivies de contractions).

Enfin, une formule atomique présente dans un séquent de cette branche est également présente dans son séquent ultime.

Proposition 12

Soit Γ un ensemble de formules d’un langage L monadique tel que la pré-preuve $A(\Gamma^\bullet)$ ne soit pas une preuve. Et soit mB (ou mB) l’interprétation de L (“modèle des termes”) définie par:

- $|mB| = \{x_i \in \text{Var}; x_i \text{ figure dans l'ultime séquent de } B\}$
- si $P_j \in \text{Préd}(L)$, on pose : $x_i \in P_j^{mB}$ ssi_{déf} $P_j x_1 \notin B$

On vérifie ci-dessous que, quelle que soit la formule $\phi \in B$:

- a) les variables libres de ϕ sont présentes dans $|mB|$,

b) on a $\vDash \phi[\sigma]$, où $\sigma: \text{Var} \rightarrow |mB|$ est l'assignation définie par $\sigma(x_i) = x_i$ dans le cas où $x_i \in |mB|$ et $\sigma(x_i)$ est n'importe quelle $x_j \in |mB|$ (qui est non vide), sinon.

Démonstration :

1. Si $\phi = Px_i$, comme $\phi \in B$,
 - a) on sait par la remarque 11 que cette formule Px_i figure dans l'ultime séquent de B , en sorte qu'on a bien $x_i \in |mB|$,
 - b) $x_i \notin P^{mB}$ (par définition de mB). On a donc bien $\vDash \phi[\sigma]$.

2. Si $\phi = \psi \wedge \chi$,
 - a) par la remarque 10, les variables libres de ϕ appartiennent à $|mB|$.
 - b) par la remarque 11, il existe dans B un séquent dans lequel soit ψ soit χ figure. Par HR, on a donc selon le cas $\vDash_{mB} \psi[\sigma]$ ou $\vDash_{mB} \chi[\sigma]$. On a donc $\vDash_{mB} \phi[\sigma]$

3. Si $\phi = \psi \vee \chi$,
 - a) par la remarque 10, les variables libres de ϕ appartiennent à $|mB|$,
 - b) par la remarque 11, il existe dans B un séquent dans lequel ψ et χ figurent simultanément. Par HR, on a donc $\vDash_{mB} \psi[\sigma]$ et $\vDash_{mB} \chi[\sigma]$. On a donc $\vDash_{mB} \phi[\sigma]$

4. Si $\phi = \forall x_i \psi$,
 - a) par la remarque 10, les variables libres de ϕ appartiennent à $|mB|$.
 - b) par la remarque 11, il existe dans B un séquent dans lequel pour une variable x_k , la formule $\psi[x_k/x_i]$ figure. Par la remarque 10, $x_k \in |mB|$ et, par a), on sait donc que toutes les variables libres de $\psi[x_k/x_i]$ appartiennent à $|mB|$. Par HR, on a $\vDash_{mB} \psi[x_k/x_i][\sigma]$. On a donc $\vDash_{mB} \phi[\sigma]$

5. Si $\phi = \exists x_i \psi$,
 - a) par la remarque 10, les variables libres de ϕ appartiennent à $|mB|$,

- b) par la remarque 11, il existe dans B un séquent dans lequel ϕ est “traitée”, i.e. est formule principale d’une agglomération de règles \exists et de contractions. Par la définition de la règle de traitement du \exists et la remarque 10, on a $\psi[x_{i_k}] \in B$ pour toute variable x_{i_k} présente dans le séquent central de B et donc pour toute variable dans $|mB|$. Par HR, on a donc pour toute $x_k \in |mB|$, $\not\equiv \psi[x_k/x_{i_k}][\sigma]$. On a donc $\not\equiv_{mB} \varphi[\sigma]$.

Proposition 13

Le calcul des prédicats monadique est décidable

Démonstration Soit Γ un ensemble de formules d’un langage L monadique. Si l’on applique à Γ^\bullet l’algorithme proposé, soit il produit une preuve $A(\Gamma^\bullet)$ du séquent Γ^\bullet , auquel cas par la Proposition 5, $\vdash \Gamma$ est prouvable, soit il produit une pré-preuve $A(\Gamma^\bullet)$ qui comporte parmi ses feuilles un séquent qui, par la Proposition 12, décrit un contre-modèle (fini) de Γ^\bullet donc de Γ (toujours par la Proposition 5).