Wendy Hammache*

Penser la notion de fonction en logique au XXᵉ siècle (1900-1950)

Pensar a noção de função na lógica no século XX (1900-1950)

Résumé

Comprendre une notion et pouvoir la définir suppose-t-il nécessairement de pouvoir saisir la nature de l'objet que désigne cette notion ? Certains concepts échouent à être définis pour eux-mêmes, et certains objets échouent à être compris indépendamment d'un certain contexte. Quand on considère une notion désignant un objet entendu généralement pour ce qu'il fait plus que pour ce qu'il est, ces deux difficultés convergent. Un concept de cette sorte nous occupera dans cette étude: la fonction en logique au XXe siècle. Par une mise en rapport des travaux de Frege, Schönfinkel et Church, nous tentons de dégager les pistes qui montrent une possible manière de comprendre la notion de fonction.

Mots-clés: logique; fonctions; définition; calcul; processus; Logique combinatoire.

Abstract

Do the understanding of a notion and the ability to define it necessarily suppose to grasp the nature of the object that this notion designates? Some concepts fail to be defined for themselves, and some objects also fail to be understood without a context. If we consider a notion denoting an object usually understood for what it does more than for what it is, these difficulties both converge. Such a notion will occupy us in this article: the notion of function in logic in the 20th century. By setting a link between the works of Frege, Schönfinkel and Church, I indentify some ways that show a possible manner to define the notion of function.

Keywords: logic; functions; definition; calculus; process; combinatory logic.

---

* Ph.D Student, Jean Moulin University Lyon 3, France.

Resumo

Será que a compreensão de uma noção e a capacidade de defini-la deve necessariamente supor a compreensão da natureza do objeto que essa noção designa? Alguns conceitos não se deixam definir por si próprios e alguns objetos também não conseguem ser entendidos sem um contexto. Se consideramos uma noção que denote um objeto, geralmente entendida mais pelo que faz, do que pelo que ela é, essas dificuldades convergem. Tal noção nos ocupará neste artigo: a noção de função na lógica no século XX. Definindo uma ligação entre as obras de Frege, Schönfinkel e Church, buscaremos identificar alguns modos de definir a noção de função.

Palavras-chave: lógica; funções; definição; cálculo; processo; lógica combinatória.

Introduction

La notion de fonction témoigne à de nombreux égards d'un caractère insaisissable, cause d'une difficulté à en donner une définition *pour elle-même*, c'est-à-dire en la considérant hors de tout système formel. L'échec, ou du moins le non-aboutissement des tentatives définitionnelles de cette notion, flagrant notamment dans les travaux de Frege, sont le reflet et la conséquence, à la fois des limites définitionnelles de cette notion et de la puissance de l'objet qu'elle désigne. Si la fonction ne peut être définie pour elle-même, c'est-à-dire pour la nature l'objet, indépendamment de tout contexte, c'est-à-dire hors de tout système formel particulier, cela doit nous éclairer sur les nouvelles voies à adopter pour comprendre cette notion. Il s'agit tout d'abord de tenter de comprendre ce qui fait qu'une fonction est fonction. Pour cela, il est requis de se pencher sur les différents usages de fonctions en logique, et de porter notre attention sur les systèmes dans lesquels la fonction tient une place centrale. Nous tâcherons ici de concentrer notre propos sur la période qui ouvre le XX^e^ siècle. C'est en effet à cette époque que la notion de fonction s'inscrit et se précise en logique. D'une part les travaux de Frege (1891[1] et 1904[2] notamment) offrent une réflexion sur le concept de fonction et sur la

---

1 Frege, "G., Funktion und Begriff", Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft, *Verlag von Hermann Pohle*, 1891.

2 Frege, G., „Was ist eine Funktion?“, *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage*, 1904.

recherche de son essence, et d'autre part les travaux de Schönfinkel (1924[3]) et ceux de Church (1941[4] et 1956[5] notamment) permettent d'envisager une autre manière de concevoir la notion de fonction, en observant l'objet qu'elle désigne pour envisager une définition.

Lorsque nous tentons de définir la notion de fonction *pour elle-même*, nous tentons de saisir la nature de l'objet qu'elle désigne. Or, si la fonction est *fonction* alors, prise au sens le plus traditionnel, elle désigne l'idée d'acte, de *faire* quelque chose. Il semble donc qu'on ne puisse la comprendre qu'en l'utilisant. La situation dans laquelle on se trouve est donc la suivante: pour utiliser une notion, il semble nécessaire de l'avoir comprise en amont, au point d'être capable d'en donner une définition. Or, une tentative de définition de la nature de la fonction, en considérant cet objet hors de tout usage dans un système donné, se heurte à de nombreux obstacles: si l'on parle de quelque chose qui *fait*, comment la définir en dehors de toute action ? L'insolvabilité de la question définitionnelle et l'impasse à laquelle elle nous mène, nous apprennent qu'on ne peut interpréter cette notion qu'en étudiant ses usages dans des contextes précis. En d'autres termes, il semble que l'on se trouve dans le cas d'un cercle vicieux: pour utiliser la notion de fonction, il faudrait au préalable la définir, et pour définir la notion de fonction il nous faudrait étudier ses usages, donc l'avoir employée en amont…

Notre premier objectif dans cet article est celui de mettre fin au raisonnement circulaire fruit de cette aporie et, plutôt que de le rejeter, le mettre à profit. Nous montrerons d'une part, que les études ontologiques de la fonction, comme objet pur et incirconstanciel, si elles n'aboutissent pas à une définition universelle et indépendante de la notion de fonction, ne sont pas vaines pour autant. Elles constituent une étape préliminaire à l'étude de la fonction dans des contextes précis. Notre second objectif découle du premier, et consistera à montrer que la notion de fonction doit précisément se penser au regard du *processus fonctionnel* qu'elle désigne. Le caractère actionnel et produisant de la fonction doit être pris en compte avant tout dans son étude qui ne peut être menée qu'en se penchant sur des cas précis.

---

3 Schönfinkel, M., „Über die Bausteine der Mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, 1924, 92, pp. 305-316.

4 Church, A., *The Calculi of lambda-conversion*, Princeton, Princeton University press, 1941.

5 Church, A., *Introduction to mathematical logic*, *Princeton, Princeton University press,* 1956.

Étude frégéenne de la notion de fonction, de sa définissabilité

Au crépuscule du XIXe siècle, Frege entame une réflexion sur la notion de fonction, comme objet émergent en logique, ou du moins émergeant sous un sens nouveau. Son objectif est d'éclairer l'objet désigné par cette notion sous tous ses aspects, de telle sorte à pouvoir en donner une définition claire et unique, voire universelle. Considérant comme source la notion de fonction en son large sens utilisé jusqu'alors dans le champ mathématique, Frege propose d'étendre le sens de cette notion pour la logique. La version étendue qu'il propose se présente sous la forme d'un double élargissement des propriétés des fonctions. On élargit d'une part le cercle des arguments possibles (comprenant désormais tout objet en général) et on étend d'autre part le cercle des opérateurs qu'une fonction peut admettre (on peut désormais envisager, par exemple, des opérateurs de comparaison).

Ce double élargissement de la fonction s'accompagne du même coup d'un élargissement de la définition que nous pourrions envisager pour cette notion, définition qu'il est alors nécessaire de construire. La tentative de définition de la notion de fonction proposée par Frege est envisagée dans un double objectif. D'une part, celui d'envisager une définition claire de la notion de fonction, pouvoir la distinguer rigoureusement des autres notions auxquelles celle-ci est liée, de telle sorte à mettre en relief les liens que ces différentes notions entretiennent: par exemple, les notions de proposition, d'argument, de valeur, de variable et de nombre. D'autre part, sa démarche est motivée par le fait qu'aucune définition proposée jusqu'alors ne semble vraiment adéquate pour déterminer ce qu'est une fonction.

En effet, les définitions proposées avant les travaux de Frege semblent trop générales, ou s'apparentent à des définitions qui mènent à un cercle vicieux, au sens où elles font intervenir d'autres notions, dont la compréhension suppose elle-même de déjà savoir ce qu'attendre d'une fonction. Parmi ces dernières, Frege réfute notamment, en 1904 la définition du mathématicien Czuber faisant intervenir la notion de variable[6]. Cette définition pose problème dans la mesure où elle suppose d'avoir compris en amont quel est le rôle d'une variable dans une fonction. Il s'agirait alors de savoir ce qu'attendre d'une fonction pour comprendre sa définition: il apparaît par conséquent que cette définition est inadaptée, dans la mesure où elle mène à un raisonnement circulaire duquel rien ne peut résulter.

---

6 Cette définition de Czuber est donnée au §3 de Vorlesungen über Differential und Integralrechnung, 1898.

Si la définition donnée par Czuber ne remplit pas son rôle de définition, elle est par conséquent insuffisante. Il faut pourtant pouvoir donner une définition de la fonction, pour les deux raisons que nous avons évoquées précédemment: d'une part, afin de garantir une définition qui pourra être tenue ultérieurement comme point de départ et sur laquelle on pourra fonder une théorie des fonctions en logique ; et d'autre part, pour pouvoir comprendre la notion de fonction dans un réseau sémantique, donc pouvoir envisager ses liens et différences avec d'autres notions qui disposent déjà de référents dans la langue naturelle ou technique.

On considère avec Frege la fonction avec ses élargissements: ainsi la notion de fonction se rapproche considérablement de celle de proposition. Afin de les distinguer, précisons que par opposition à une proposition, notion entendue comme désignant un énoncé complet, saturé, on considérera, à la manière de Frege, la fonction comme une expression insaturée, attendant d'être complétée par un argument.

En effet, dès lors qu'une fonction peut prendre pour argument tout objet en général, une expression de la forme «La capitale de *x*»[7], sera également une fonction, où la partie insaturée, représentée par la lettre *x* correspond à la place de l'argument qu'attend la fonction. Ici, le *x* est entendu comme lettre «muette», représentant simplement une place vide appelant à être remplie par un argument. Dès lors que l'on insère un argument à cette place (ici, n'importe quel nom de pays), la partie insaturée de la fonction est complétée, et l'expression dénote désormais une valeur, la «valeur de la fonction pour tel argument » (à savoir pour cet exemple, une ville – puisque la valeur de la fonction peut aussi être «tout objet en général », et pas seulement des valeurs numériques).

On remarquera ici que le vocabulaire qu'utilise Frege pour parler de la fonction présente étonnement un caractère statique. «Dénoter», «attendre»: là où on pourrait s'attendre à ce que la *fonction* soit un objet qui *fasse*, cet objet est présenté comme quelque chose qui *est*. La fonction logique chez Frege, avant d'être action ou processus, ne serait-elle qu'un objet statique, une expression dénotante, qui plus est, en puissance seulement, puisque il sera nécessaire qu'elle soit complétée par un argument pour dénoter une valeur, en acte ? Il semble qu'il faudra attendre des travaux ultérieurs sur les fonctions logiques pour que ces objets soient considérés comme des processus.

---

7 Cet exemple est emprunté à Frege, 1891.

Pour ce qui nous intéresse pour l'instant, constatons qu'une telle manière de concevoir les fonctions comme expressions insaturées dans l'attente de complétion par un argument nous invite à réfléchir davantage sur le statut de l'argument, et par là même sur la notion de variable qui y est liée. En effet, ce que l'on nomme volontiers « variable », en tant qu'elle peut prendre un nombre indéfini de valeurs, jusqu'alors indéterminées, correspond à l'argument de la fonction, traditionnellement représenté par une lettre. Mais considérer une lettre (donc un objet, au sens large) pour indiquer la place de l'argument (donc une place vide) apparaît problématique. En effet, représenter par une lettre ce qui est en réalité un espace censé être vide dans l'attente de complétion par un argument, revient à déjà avoir rempli cette place. En d'autres termes, on place quelque chose là où on voudrait signifier qu'il n'y a rien. Pour éviter cette ambiguïté, Frege propose d'indiquer la place de l'argument directement par un espace vide plutôt que par une lettre quelconque qui indiquerait une place vide: cela permet de souligner explicitement que l'expression a besoin d'être complétée. Mais, vouloir lever une ambiguïté d'une telle manière, c'est prendre le risque d'en créer une autre, visiblement plus sévère. En effet, dans le cas de fonctions à plusieurs arguments (cas que Frege n'exclut pas), plus rien ne permet de distinguer ses multiples arguments. Par exemple, suivant la notation proposée, une expression de la forme:

$2x^2 + 3y$

sera exprimée comme suit :

$2(\ )^2 + 3(\ )$

Dans la comparaison de ces deux expressions, il apparaît en effet qu'une telle notation ne permet pas de faire la différence entre le premier et le deuxième argument. Dans la pratique, rien ne permet de savoir si l'on peut utiliser deux valeurs différentes en argument, ou si celles-ci doivent être les mêmes; cette expression ne permet pas de savoir si la fonction est de la forme: $2x^2 + 3x$ ou si elle est de la forme $2x^2 + 3y$. Cette solution ne paraît donc pas exactement adéquate[8].

En tous les cas, la question de la définissabilité de la fonction se pose. Et pour cela, il semblerait qu'il faille distinguer un élément dans la fonction qui

8 Russell adresse une critique similaire de ce principe à Frege en 1903, dans les Principles of Mathematics, Appendix A, «The logical and arithmetical doctrines of Frege », §480.

serait ce qu'elle a de propre, ce sur la base de quoi on pourrait en donner une définition. On ne peut pas se contenter de considérer que ce qui caractérise la fonction, c'est son caractère insaturé et ce, pour deux raisons. D'une part, car cette position nécessite de se demander si toute expression insaturée est forcément une fonction ou non, et la résolution de cette question nous mènerait dans des considérations éloignées de notre présent sujet. D'autre part, cela reviendrait à considérer que c'est la place vide qui fait que la fonction est fonction, et donc que la notion de fonction se définit par le biais d'une place vide. Autant dire que désigner la fonction en désignant une place vide reviendrait à désigner précisément ce qu'elle n'est pas. Mais ce problème peut être exporté à toutes les manières par lesquelles on essaierait de définir une fonction, et ainsi la recherche de l'essence de la fonction s'avère de ce point de vue toujours infructueuse, car tenter de dire où se trouve l'essence de la fonction semble revenir toujours à désigner ce qu'elle n'est pas. Désigner l'argument comme constitutif de l'essence de la fonction, c'est en effet désigner une place vide comme telle. Définir la valeur comme essence d'une fonction, c'est confondre la fonction elle-même avec le nombre qu'elle dénote. Déterminer comme étant l'essence de la fonction «ce qui est commun à plusieurs expressions d'une même fonction», c'est-à-dire l'expression munie de places vides, c'est, comme nous venons de le voir effacer les différences potentielles d'arguments de la fonction. Enfin, désigner la fonction simplement comme expression revient à l'assimiler à la notion d'énoncé, et par conséquent omettre ce qu'une fonction a de propre qui la distingue d'autres énoncés, par exemple d'une proposition. La recherche de l'essence de la fonction s'avère échouer en toutes ces situations, et en conséquence, définir la notion de fonction apparaît comme une tâche bien difficile à mener à son terme. C'est pour ces raisons qu'il devient nécessaire de questionner la volonté même de définir la notion de fonction pour elle-même, pour sa nature.

En effet, serait-il toujours raisonnable de vouloir donner une définition d'une notion? N'y aurait-il pas justement des notions qui se comprennent précisément par le fait de ne se laisser admettre et enfermer sous aucune définition, et devraient par conséquent être reconnues comme telles? Si tel est le cas de la notion de fonction, alors plutôt que de considérer cet échec définitionnel comme un point final et d'affirmer que la notion de fonction est un indéfinissable, nous devrons envisager les difficultés que cet exercice rencontre comme une issue possible. En effet, si la notion de fonction se laisse pas définir ontologiquement, c'est-à-dire si l'on ne peut dire son essence, sa nature, en tout cas lorsqu'on la considère indépendamment de tout contexte d'application (hors de tout système formel), alors nous devons envisager une nouvelle voie.

Ce qui fait que la fonction est fonction, c'est justement la transformation qu'une fonction permet d'effectuer sur un argument, et la manière dont cette transformation est réalisée: nous entendons donc ici non seulement le fait de passer d'un argument à une valeur, mais aussi le *processus* par lequel une fonction *produit* une valeur. Si l'on veut comprendre la notion de fonction, il nous faudra alors considérer l'étude ontologique de cet objet non pas comme un achèvement auquel notre recherche aspire, mais comme une simple amorce, une démarche préliminaire à la compréhension de cette notion. Les obstacles que nous rencontrons tandis que nous tentons de comprendre ontologiquement la fonction pour en donner une définition hors de tout usage, hors de toute application de fonctions, et donc hors de tout calcul nous invitent justement à considérer cet objet toujours dans des cas dans lesquels on en fait usage, dans des contextes et des théories précises.

La notion de fonction chez Schönfinkel

Après l'étude définitionnelle de la notion de fonction chez Frege, et sans dire que ce soit forcément corrélé, la notion de fonction prend petit à petit une place centrale dans les systèmes émergents. En particulier, le système qu'envisage Schönfinkel au début des années 1920 témoigne de cette métamorphose du statut de la notion de fonction. La démarche schönfinkelienne vise à diminuer autant que possible le nombre de notions mises en jeu dans un système logique: ainsi s'agit-il de n'admettre plus que la notion de fonction. À la différence de Frege, Schönfinkel n'entreprend pas d'examen à proprement parler de la *notion* de fonction, comme concept. Ses travaux considèrent la «fonction», non pas comme une notion déconnectée de ses usages, mais comme un objet agissant au cœur de son système, objet dont il semble falloir user plutôt que tenter d'en construire une analyse ontologique. Toute la démarche de Schönfinkel pour la construction de son système témoigne de cette volonté d'user de la fonction, et donc de considérer sa *fonction* avant de pouvoir en donner une définition. Quand quelques mots sur ce que sont et comment sont entendus les objets à notre disposition s'avèrent tout de même nécessaires pour la construction de son système, Schönfinkel affirme entendre la fonction en son sens dit le plus simple (c'est aussi celui qu'on admet aujourd'hui comme traditionnel): la fonction comme correspondance, représentante d'un lien entre un argument donné et une valeur. Plus que cela, la fonction est entendue comme correspondance entre deux domaines d'éléments : le domaine des arguments possibles, et le domaine des valeurs possibles de la fonction. Cette correspondance est régie par la nécessité que pour toute valeur du domaine d'arguments corresponde au plus un élément du domaine des valeurs de la fonction[9].

En tous les cas, les fonctions chez Schönfinkel bénéficient d'une place centrale dans le système qu'il fonde. Non seulement son système n'est constitué que de fonctions, mais on confère à celles-ci un sens bien déterminé. En effet, seules trois fonctions différentes sont considérées, et seulement celles-ci sont admises et disposent d'un rôle bien défini dans le système. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la logique schönfinkelienne, mais observons toutefois qu'avec Schönfinkel, on envisage que, par l'utilisation de fonctions seules, on peut construire des systèmes équivalents dans ce qu'ils permettent de faire, à ceux envisagés antérieurement.

Par ailleurs, de nouvelles propriétés sont considérées pour les fonctions, qui ouvrent de nouveaux possibles dans leurs usages. En effet, admettant cette notion de fonction comme règle de correspondance, Schönfinkel propose de l'étendre davantage, en permettant aux fonctions elles-mêmes d'être non seulement arguments d'autres fonctions, mais aussi valeurs de fonctions. Dès lors que le système ne comprend comme objets plus que quelques fonctions, les objets qu'une fonction dans ce système pourra admettre comme arguments, seront nécessairement des fonctions, et en l'occurrence celles-là: les trois seules qu'admet le système.

À partir des travaux de Schönfinkel, et en particulier de son article de 1924 se développent les premiers principes de la logique combinatoire, qui se présente, selon une idée similaire, comme système de combinaison de fonctions dont le rôle de chacune est bien déterminé. C'est en articulant ainsi ces fonctions qu'on peut produire une forme de calcul, uniquement fonctionnel. Ainsi la fonction recouvre un statut plus *fonctionnel* en tant qu'elle se présente comme opération constitutive d'un calcul. Ce nouveau statut des fonctions insiste sur ce en quoi elles sont *fonctions* comme *processus*, dans le système. Les fonctions ne sont en effet plus considérées comme des objets statiques, qui simplement *dénoteraient*, des objets dont on souhaiterait pouvoir faire le

9 Cette manière de concevoir les fonctions rappelle dans une certaine mesure le point de vue russellien des *Principles of Mathematics* de 1903, qui suggère une équivalence entre les notions de fonction et de relation, au sens ou une relation R telle que xRy pourrait être entendue comme une fonction admettant comme valeur y, pour un argument x.

tour pour examiner leur nature et saisir leur essence, les comprendre ontologiquement et qui pourraient être pensés indépendamment de tout système. Désormais la fonction est pensée comme outil de calcul par excellence dans le système, et d'ailleurs le seul.

La question de la définissabilité de la notion de fonction se pose donc autrement. En effet, il s'agit désormais de savoir ce que la fonction *représente* dans un système donné, et quels sont les possibles qu'elle permet. Dès lors qu'on considère les fonctions comme règles de correspondance, on pense déjà un réseau entre les éléments du système que l'on étudie, au sens où ils se combinent les uns avec les autres. Si on ajoute à cela le fait que les éléments du système en question ne sont que des fonctions, alors on bâtit un système de combinaisons au sein duquel les fonctions construisent elles-mêmes un calcul. C'est là un point fondamental autour duquel les travaux de Schönfinkel et le développement de la logique combinatoire qu'ils annoncent font surgir une définition de la notion de fonction bien différente de celle qu'envisageait Frege. Ici la notion de fonction n'est considérée que pour le *processus* qu'elle représente ; ainsi la fonction n'est-elle que pur élément de calcul se présentant davantage comme outil que comme objet.

La fonction dans le lambda-calcul de Church

Un deuxième exemple que nous pouvons convoquer, représentatif de cette interprétation actionnelle des fonctions, est celui du statut de cette notion dans le lambda-calcul de Church. Ce système, fondé dès le début des années 1930, s'oriente complètement autour de la notion de fonction. Dans le prolongement des travaux de Schönfinkel, la notion de fonction occupe dans le système de Church une place centrale, en tant qu'elle est constitutive du calcul qu'il construit. En lambda-calcul, tous les objets sont des fonctions. L'évidente influence schönfinkelienne est revendiquée par Church lui-même.

Toutefois, chez Church, le souhait de fonder un système qui s'oriente intégralement autour de la notion de fonction n'est pas formulé explicitement, contrairement à Schönfinkel qui insiste sur sa volonté de réduire au maximum le nombre de concepts en jeu pour ne garder que celui de fonction. Le résultat est donc le même, puisque dans les deux cas on obtient un système dans lequel tout est fonction, quoi que la démarche et l'objectif de la logique schönfinkelienne et du lambda-calcul de Church soient différents. La démarche de Church est en effet menée dans l'objectif de construire une logique qui mette de côté tout ce qui peut mener à des paradoxes. Son système est donc fondé en vue d'échapper aux situations qui peuvent mener à des contradictions, et non directement et simplement en vue de réduire le nombre de notions à notre disposition dans un système donné. Dans tous les cas, les deux n'utilisent qu'un seul objet qui joue un rôle central: la fonction.

La notion de fonction en lambda-calcul se présente sous une forme plutôt différente de celles connues jusqu'alors. Les caractéristiques et le mode de présentation des fonctions en lambda-calcul sont en effet différentes des situations que l'on pouvait rencontrer chez Frege. À titre d'exemple, on peut souligner que Church prolonge l'idée schönfinkelienne selon laquelle une fonction à plusieurs arguments peut être interprétée comme une fonction à un argument prenant pour argument une fonction à un argument, etc. En lambda-calcul, non seulement ce principe s'applique, mais ajouté à celui-ci, on admet que le nombre d'arguments que peut prendre une fonction, s'il est au plus de 1 (puisque toute expression avec un nombre supérieur d'arguments pourra être ramené à une fonction à un argument), peut aussi être de 0. Ainsi, une même fonction peut attendre à la fois un et aucun argument, même au sein d'une même expression. Ainsi pouvons-nous construire des expressions présentant deux occurrences de la même fonction, qui peut très bien, à une occurrence donnée, appeler un argument, et à une autre n'en appeler aucun. Par ailleurs, les règles de combinaison en lambda-calcul sont particulièrement permissives, au point qu'une fonction peut se prendre elle même pour argument. Ce principe, qui a été rejeté par la théorie des types de Russell en vue d'éviter les situations contradictoires, est remis à l'actualité par les travaux de Schönfinkel qui permet qu'une fonction fasse partie de son propre domaine d'arguments, et est également réutilisé dans le lambda-calcul de Church (du moins dans sa version non-typée).

De manière plus générale, on observe qu'en lambda-calcul, si tout est fonction, alors toute association de symboles dans les règles du système est assemblage, combinaison, donc application de fonctions. Il en découle que toute combinaison de fonctions se présente comme une forme de calcul. Les interactions au sein du système ne sont qu'application de fonctions. On parle de «conversion»: ce processus est celui par lequel on passe d'une fonction donnée (avec un argument) à son résultat. Plusieurs formes de conversion peuvent être admises, correspondant à l'application de différentes règles[10]. Jusqu'alors, sur la base d'une fonction, les systèmes présentés ne permettaient qu'une seule

10 Voir Church 1941

manière d'appliquer la fonction à l'argument. Avec le processus de conversion en lambda-calcul, il existe plusieurs manières de réaliser ce processus.

Les travaux de Church à partir de 1940, s'accompagnent d'une réflexion autour de la fonction. En revanche, dans son système, toute étude de la fonction est étude non pas de la *nature* de la fonction mais de ses *propriétés*. En effet, les travaux de Church ne montrent pas de préoccupation pour une étude de la notion de fonction comprise comme objet déconnecté de tout système ou de toute interaction. Chez Church, il s'agit de comprendre la fonction au regard de ce qu'elle *fait* au sein du système. Il y a donc ici un renversement dans la manière d'interpréter les fonctions. Si les recherches frégéennes nous apprennent que la fonction ne peut être définie, mais qu'on peut seulement donner des exemples de ce qu'elle permet de faire, dans le cas churchien, ce principe est justement appliqué: on part alors de ce que la fonction permet de faire pour éventuellement pouvoir en construire une définition.

Dans le système de Church, les fonctions sont des opérations qui *produisent* quelque chose, à savoir le résultat d'un calcul. Cependant, que se passe-t-il lorsqu'une fonction, appliquée à un certain argument, ne donne pas de résultat ? Dans le système churchien, les règles de construction et d'association des fonctions étant particulièrement permissives, de nombreuses combinaisons de fonctions peuvent engager un processus qui ne débouche jamais sur un résultat. Notons que ce qui nous intéresse ici est la *démarche de production*, plus que le résultat lui-même, et la *démarche de transformation*, plus que ce qui en résulte. Dans processus de conversion, lorsqu'il donne un résultat, ce dernier est admis comme «valeur de la fonction». Ainsi, si dans ce système toute construction ou association de fonctions est action, il s'ajoute à cela que l'action fonctionnelle est production de résultat. De ce point de vue, il apparaît donc que, dans le cas du lambda-calcul, et à plus forte raison dans celui du lambda-calcul typé (dans lequel toutes les fonctions que l'on peut construire donnent un résultat), toute interaction dans le système permet une opération avec une visée produisante, avec un objectif de transformation.

Règle de correspondance: règle descriptive ou créatrice ?

La notion de fonction est entendue par Schönfinkel comme par Church comme *règle de correspondance*, ou simplement comme *correspondance*, allant de l'argument à la valeur donnée. La fonction n'est alors plus considérée comme un objet statique que l'on pourrait saisir entièrement, que l'on pourrait saisir pour elle-même et que l'on pourrait étudier hors de tout contexte de calcul. La fonction est dans ces deux systèmes, avant tout application, c'est-à-dire objet de calcul, c'est-à-dire processus. Pourtant, en tant qu'on parle de règle de correspondance, on peut se demander si cette règle est simplement *descriptive* (en ce qu'elle montrerait seulement une correspondance) ou si elle serait plus que ce cela, à savoir *créatrice* d'une certaine correspondance.

Du côté de Schönfinkel, la fonction est règle de correspondance, en tant qu'elle assure le lien entre deux éléments de deux domaines: le domaine des arguments de la fonction, et le domaine des valeurs de la fonction. Ainsi Schönfinkel propose d'entendre par fonction:

> *une correspondance entre les éléments d'un certain domaine de quantités, le domaine des arguments, et ceux d'un domaine des valeurs de la fonction (...) telle que, pour chaque valeur d'argument correspond au plus une valeur de la fonction.*[11]

Dans cette citation, rien ne nous informe expressément sur la manière dont ces deux domaines sont construits. On suppose que le domaine des arguments est le domaine des arguments *possibles* de la fonction. Quant au domaine des valeurs de la fonction, on peut admettre également qu'il est constitué des valeurs *possibles* de la fonction. Schönfinkel ajoute que ce second domaine coïncide avec le premier: ce lien est en effet assuré par le biais de la fonction elle-même. Mais de quelle nature ce lien est-il ? Présenté ainsi, on nous apprend que la fonction fait le lien entre deux domaines, mais rien ne précise si ce domaine est donné *avant* ou *après* la construction de la fonction, ou du moins *avant* ou *après* son énonciation. Autrement dit, cette assertion n'apporte aucune donnée temporelle. On pourrait donc supposer que les deux domaines préexisteraient à la construction de la fonction, et que la fonction serait une règle liant simplement l'un des éléments de ces deux domaines avec l'un des éléments de l'autre domaine. Cette conception est surtout problématique en ce qui concerne le domaine des valeurs de la fonction. Si celui-ci préexiste à l'application de la fonction à un argument, alors la fonction ne serait qu'une règle de correspondance *descriptive*, qui *montrerait* seulement une relation entre deux éléments de deux domaines donnés.

Chez Schönfinkel, on considère la notion de fonction pour le lien qu'elle représente. En cela, on s'éloigne du raisonnement frégéen, dans la mesure où la fonction est considérée non pas comme une entité mais comme *pur lien*

---

11 Schönfinkel 1924, §2.

entre deux éléments: en quelque sorte, elle ne semble pas exister en dehors du lien qu'elle assure. L'inconvénient toutefois est que la fonction comme lien pourrait être considérée comme faisant correspondre des éléments préexistants à la construction, du moins à l'application de la fonction (que l'on considère ces deux étapes comme simultanées ou non). Dès lors, on envisagerait la fonction comme descriptive de relations mais ces relations existeraient antérieurement. Or, pour deux éléments quelconques, qu'ils soient numériques ou non, les opérations possibles pour établir un lien entre eux sont multiples, et donc les possibilités d'énoncer une fonction qui, sur la base d'un argument donné, mène à une valeur donnée, se révèlent infinies. Dans ce cas, il apparaît donc impossible de dire *la* fonction qui fait le lien entre ces deux éléments, puisqu'il faudrait en énoncer une infinité. Or, parler de la fonction comme règle supposée descriptive ne permet pas de prendre en compte cette infinité des démarches pour lier argument et valeur. La fonction doit donc bien être plus qu'une simple désignation d'un lien entre un argument et une valeur, elle doit nécessairement contenir quelque chose en plus qui nous permet de savoir en quoi le lien d'un argument à une valeur est différent d'un autre lien qui considérerait les mêmes données.

Dans tous les cas, si cette conception schönfinkelienne met en avant l'idée de processus dans la définition qu'on donne des fonctions en tant qu'elle n'est que *lien* ; les considérer comme exhibant une correspondance (peut-être déjà effective avant la construction de la fonction) entre deux éléments de deux domaines, sans donner plus de précision sur la nature de ce lien ni sur la manière dont sont construits les deux domaines, c'est prendre le risque de légitimer la position selon laquelle on ramènerait le rôle des fonctions à une visée descriptive.

La position de Church sur la question va plus loin, et envisage un autre point de vue sur ces domaines et la manière dont ils sont constitués, et par conséquent sur la nature du processus fonctionnel. Church considère comme Schönfinkel la fonction comme règle de correspondance mais on dispose, dans les descriptions qu'il propose, d'éléments supplémentaires qui soulignent que le domaine des valeurs est *créé* dans un temps postérieur à celui dans lequel est créé celui des arguments.

> *La classe de toutes les valeurs de la fonction, obtenue en prenant tous les arguments possibles, sera appelé domaine des valeurs*[12]

12 Church 1941, chapitre 1

On envisage donc ici que le domaine des valeurs soit *créé* par la fonction en l'appliquant à l'ensemble de ses arguments. Ici le domaine des valeurs est donc *produit* par la fonction elle-même. Pour Church, il est donc clair que les fonctions ne sont pas des descriptions de relations qui préexisteraient à la fonction, mais des processus créateurs, desquels naissent plusieurs valeurs, regroupées dans un domaine qui, *a posteriori*, constituera l'ensemble des valeurs. La définition churchienne de la notion fonction comme processus dans son système est donc donnée comme telle:

> *Une fonction est une opération qui peut être appliquée à une chose (l'argument) pour donner autre chose (la valeur de la fonction).*[13]

On parle ici d'«opération», qui «donne» ou «produit», une valeur. Loin de se contenter d'être des descriptions de liens entre des éléments, elles sont avant tout des correspondances *créatrices*. À un argument donné à la fonction comprise comme opération, celle-ci est amenée à *produire* une valeur, de telle sorte que, par application de la fonction à tous ses arguments possibles, on puisse former un domaine des valeurs de la fonction: c'est en ce sens que la notion de «domaine de valeurs» est entendue chez Church.

De la mise en lien de ces deux points du vue, nous observons que, entendre la notion de fonction comme désignant une règle de correspondance ne nous garantit pas que l'on admette la fonction comme processus créateur. Il faut ajouter quelque chose de plus à l'idée de règle de correspondance pour qu'elle ne dénote pas seulement un procédé descriptif. C'est pourquoi on préférera parler d'opération, pour mettre en lumière sa visée assurément créatrice.

La conception churchienne de la fonction présente cet avantage de considérer les fonctions pour le caractère créateur de ces processus, à savoir le fait qu'elles *produisent* un résultat. Il semble toutefois que si l'on parle d'opération, il faille désigner ce processus opérationnel, en dehors des valeurs qu'elle prend. Nous avons vu que l'on ne peut définir la notion de fonction en essayant de saisir sa nature sans considérer *l'action* que cette notion désigne. Or, il faut bien admettre que l'on ne peut pas non plus se limiter à ne parler de fonctions que dans des cas particuliers, avec un argument donné et une valeur donnée. Une position intermédiaire que nous pourrions considérer serait d'établir une notation pour désigner une fonction comme *démarche*, comme *processus* en dehors de cas précis (c'est-à-dire en dehors des arguments que la fonction peut prendre et des valeurs qu'elle peut donner).

13 Church 1941, chapitre 1

Alternatives pour parler d'une fonction en dehors des cas d'application et de calcul

Nous pouvons désormais envisager des pistes de définition de la notion de fonction qui souligneraient précisément le fait que celles-ci ne sont que pures intentionnalités: une fonction serait en ce sens un lien qui, non seulement lie une valeur à une autre mais qui créé cette dernière dans le même temps sur la base de la valeur donnée en argument. Mais, si le fait de parler de la notion de fonction comme entité pure et hors de tout contexte est un exercice qui présente de nombreuses limites, il n'est pas dit qu'on ne puisse pas parler de *telle* fonction particulière, en dehors de cas d'application à des arguments spécifiques. Si on considère, avec la position churchienne, que la fonction n'est que ce qu'elle fait, alors cela revient à considérer *telle* opération, en dehors de toute application à un objet donné. Cette manière de procéder constitue une alternative pour parler des fonctions pour ce qu'elles sont, en dehors de toute application et de tout calcul. Ainsi peut-on parler de *telle* fonction pour elle-même et non du résultat qu'elle donne pour tel argument. Il s'agit ici d'envisager un principe pour parler dans tous les cas *d'une* fonction particulière, et non pas de la notion générale de «fonction», comme mot recouvrant un certain concept vague et insaisissable.

Lorsqu'on considère la fonction comme fondamentale au sein d'un système, il est nécessaire de pouvoir l'utiliser, mais aussi de pouvoir parler de la fonction en tant que *telle* fonction, c'est-à-dire *telle* forme de processus, et ce, en dehors de toute application. Cela revient à considérer une fonction pour ce qu'elle *est* donc pour ce qu'elle *fait* en général, quel que soit l'objet qu'elle prenne pour argument. S'il est nécessaire d'envisager cette possibilité, alors il lui faut bien une notation pour distinguer une expression qui exprimerait quelque chose au sujet de la fonction pour elle-même, c'est-à-dire pour son action, d'une expression qui serait une application de la fonction en question à tel argument et qui dénoterait une valeur. Quoi que ce principe soit peu utilisé, du moins seulement dans des réflexions théoriques sur les fonctions, disposer d'une notation qui permette de ne laisser voir que la fonction elle-même est tout de même utile et s'avère parfois nécessaire.

Frege proposait dès 1891 de considérer la notion de «parcours de valeur» pour parler de la fonction pour ce qu'elle est, hors de toute application à un argument. Cette notion permet de désigner en les englobant l'ensemble de toutes les valeurs que la fonction peut donner pour tous ses arguments possibles, considéré comme un tout unifié. La notation proposée pour la désignation du parcours de valeur prend en compte la démarche, c'est-à-dire la manière dont, sur la base d'un argument, la fonction dénote une valeur.

Énoncer une fonction, quelle qu'elle soit, appliquée ou non à un argument particulier, revient traditionnellement chez Frege à ne désigner que la valeur de la fonction. Avec la notion de «parcours de valeurs», au contraire, on obtient une manière de faire en sorte que l'expression dénote la fonction *elle-même*. Frege propose la notation suivante:

> *Je remplace le signe de l'argument dans l'expression de la fonction par une voyelle grecque, j'enferme le tout entre parenthèses et je place devant (la parenthèse) la même lettre grecque avec un esprit doux.*[14]

$x - 4x$
devient alors
$\dot{\alpha}\ (\alpha - 4\ \alpha)$

La notation frégéenne de «parcours de valeurs», quoi que peu utilisée, présente un intérêt indéniable: celui de permettre de parler de la fonction pour elle-même. Par ailleurs, et quoique ce ne soit pas une volonté exprimée par Frege, cette notation permet également de mettre l'accent sur la dynamique de la fonction comme processus, puisqu'on ne retient que la *démarche* que désigne une fonction. Cependant, ce principe frégéen présente une limite que nous nous devons de souligner. Bien que cela permette de faire apparaître la manière dont une fonction agit, par quel processus est caractérisée sa démarche, le fait de parler de «parcours de *valeurs*» pose question: parle-t-on vraiment de la fonction pour ce qu'elle est, lorsqu'on fait intervenir la notion de valeur (et aussi qu'on définit cette notion comme somme des valeurs possibles de la fonction, quoi qu'elles soient considérées comme un tout unifié) ou parle-t-on en même temps des arguments et des valeurs de la fonction, mais finalement sans jamais parler de la fonction elle-même?

Cette ambiguïté est résolue quelques années plus tard, avec Church, qui, sans doute influencé par Frege (quoi qu'il ne le mentionne pas à ce propos) propose en 1941 une notation. De même que les «parcours de valeurs» frégéens, cette notation doit permettre de parler de *telle* fonction *pour elle-même* indépendamment de situations d'application, et ne doit pas faire appel directement aux notions d'argument et de valeur. Les objectifs de Church dans la construction de ce principe sont proches de ceux de Frege: d'une part, disposer d'une notation pour parler de la fonction elle-même, et d'autre part,

14 Frege, «Fonction et concept», 1891

éviter les ambiguïtés qui peuvent surgir lorsque, pour une même expression, on souhaite parler soit de la valeur qu'elle donne pour un quelconque argument, soit de la fonction elle même, par exemple pour énoncer une propriété de celle-ci.

Ainsi Church propose-t-il une notation qui permette de «bien distinguer un symbole ou une expression qui dénote une fonction, d'une expression qui contient une variable, et qui dénote de manière ambiguë des valeurs de la fonction»[15]. La notation churchienne de ce procédé, que l'on appelle *lambda-abstraction*, est proche de celle proposée par Frege et se présente de telle sorte qu'une expression de la forme:

$(2x + x)$

deviendra en forme «abstraite»:

$\lambda\, x\ (2\mathrm{x} + x)$

Dans cet exemple, on remarque bien l'intérêt d'une telle notation. Tandis que la première expression exprime quelque chose au sujet d'un nombre (en effet, elle dénote une valeur, la valeur de la fonction pour un argument donné, jusqu'alors indéterminé), la deuxième permet d'exprimer quelque chose au sujet de telle fonction, ou, plus précisément, de telle forme de fonction.

À la différence du principe frégéen de «parcours de valeurs», ici on ne parle ni de valeur ni d'argument. Par la lambda-abstraction on fait justement abstraction de tout cela pour ne garder que la fonction qui, en dehors de toute idée de résultat, présente une *manière d'agir*, une *démarche*, un *processus* bien déterminé. Par conséquent, considérant la fonction hors d'une quelconque situation d'application, et donc hors de tout calcul, on peut alors observer la fonction comme une action particulière, mais aussi comme une manière d'agir.

Conclusion

Définir une notion, un concept, ne nécessite pas de pouvoir en faire le tour pour le saisir complètement, et ensuite pouvoir l'englober dans quelques termes du langage, mais appelle souvent, au moins à pouvoir dire la nature

15 A. Church 1941, chapitre 1, §4.

de l'objet que cette notion désigne, dire, comme l'envisageait Aristote, le «ce que c'est» de ce que l'on veut définir. Or, pour un objet qui semble ne se dire que par ce qu'il fait, il est malaisé, sinon impossible de vouloir dire *ce que c'est* en dehors de *ce que ça fait*. Si la notion de fonction peut être dite en dehors de cas d'application de telle fonction précisément avec tel argument, on ne peut toutefois omettre, pour la comprendre, le rôle des fonctions dans les systèmes dans lesquels on en fait usage, en d'autres termes, quelle est leur *fonction*. L'échec définitionnel rencontré lors de tentatives de définition de la fonction pour sa nature permet de souligner le fondement actionnel de la fonction, ce en quoi elle n'est que processus, et invite à se concentrer sur «la fonction de la fonction» si on veut pouvoir saisir cet objet et en envisager une définition. Au terme de notre propos, nous pouvons donc affirmer que la notion de fonction ne peut en aucun cas être comprise si l'on ne considère pas le processus fonctionnel. L'indéfinissabilité ontologique de l'objet devient ainsi témoin de sa puissance actionnelle. Entreprenant ici de souligner le fait que la fonction est pur processus, nous admettons que la notion de fonction n'est que désignation de ce processus.

Quand les pistes définitionnelles se transforment de la sorte, l'objectif qui nous anime n'est plus de comprendre ontologiquement notre objet, mais de savoir comment l'utiliser. C'est ainsi que de la question frégéenne «qu'est-ce qu'une fonction?»[16], l'intérêt pour cette notion et ce qu'elle désigne évolue, au point que la question qui devrait être posée est plutôt «comment utiliser le mot fonction?»[17], quel processus, quelle action est désignée par la notion de «fonction»

16 *Was ist ein Funktion?* qui est le titre de son article de 1904.

17 Carnap à Church et Quine, lettre du 7 août 1939.