José Seoane*
DOI: http://doi.org/10.32334/oqnfp.2021n49a797

Heterogeneidad euclidiana**

Heterogeneidade euclidiana

Euclidean heterogeneity

Resumen
Puede hablarse de heterogeneidad expresiva *cuando una demostración apela (en su comunicación) a recursos lingüísticos y a recursos visuales; puede hablarse de* heterogeneidad inferencial *cuando tal apelación resulta esencial (argumentalmente) para la trama demostrativa. Un ejemplo paradigmático de heterogeneidad inferencial lo constituyen las demostraciones que figuran en los Elementos de Euclides. Este artículo pretende llamar la atención sobre cuatro modos de intervenir el diagrama en dichas tramas inferenciales: contribuyendo a la* aplicación *de esquemas o estrategias inferenciales vigentes,* pautando *la secuencia demostrativa heterogénea, interviniendo en la* "descomposición del espacio lógico" *(Netz 1999), aportando a la* reducción *de alternativas a considerar. En cada una de estas modalidades el diagrama participa de modo singular como recurso comunicacional y dispositivo inferencial en el contexto heterogéneo euclidiano.*

Palabras clave: heterogeneidad expresiva; heterogeneidad inferencial; demostración euclidiana; razonamiento geométrico basado en diagramas

* Universidad de la República. Sistema Nacional de Investigadores, Uruguay.
Contato: seoanejose2010@gmail.com.

** Deseo expresar mi agradecimiento a Abel Lassalle Casanave, que revisó crítica y constructivamente una versión previa de este trabajo. Así mismo me beneficié de la lectura cuidadosa e inteligente de un árbitro anónimo cuyas observaciones (en la medida de mis posibilidades) creo haber incorporado. Finalmente, dejo constancia que el diseño de los diagramas mejoró considerablemente por la intervención generosa y competente de Juan Lassalle Casanave. Los errores subsistentes son, por supuesto, de mi entera responsabilidad.

Recebido em: 09/04/2021 Aceito em: 10/11/2021

Resumo

Pode-se falar de heterogeneidade expressiva *quando uma demonstração apela (em sua comunicação) a recursos linguísticos e visuais; pode-se falar de* heterogeneidade inferencial *quando tal apelo é essencial (do ponto de vista argumental) para a trama demonstrativa. Um exemplo paradigmático de heterogeneidade inferencial são as provas que aparecem nos Elementos de Euclides. Este artigo pretende chamar a atenção para quatro formas de intervir o diagrama nessas demonstrações: contribuindo para a* aplicação *de esquemas ou estratégias inferenciais,* guiando *a sequência demonstrativa heterogénea, intervindo na* "decomposição do espaço lógico" *(Netz 1999), contribuindo à* redução *de alternativas a serem consideradas. Em cada uma dessas modalidades, o diagrama participa de forma singular como recurso comunicacional e dispositivo inferencial no contexto euclidiano heterogêneo.*

Palavras-chave: heterogeneidade expressiva; heterogeneidade inferencial; prova euclidiana; raciocínio geométrico baseado em diagramas

Abstract

One can speak of expressive heterogeneity *when a demonstration appeals (in its communication) to linguistic and visual resources. One can speak of* inferential heterogeneity *when such an appeal is essential (inferentially) for the demonstrative plot. A paradigmatic example of inferential heterogeneity is the Euclidean proof. This paper aims to draw attention to four ways of intervening the diagram in such argumentative structures: contributing to the* application *of inferential schemes or strategies,* guiding *the heterogeneous demonstrative sequence, intervening in the* "decomposition of logical space" *(Netz 1999), contributing to the* reduction *of alternatives to consider. In each of these modalities, the diagram participates in a singular way as an expressive resource and as an inferential device.*

Keywords: expressive heterogeneity, inferential heterogeneity, Euclidean proof, diagram-based geometric reasoning.

En una demostración matemática puede distinguirse entre su estructura y su expresión; por ejemplo, una demostración por absurdo o una demostración directa del mismo resultado divergen desde el punto de vista estructural, pero en cambio dos demostraciones cuya única diferencia es que una está escrita en español y otra en portugués discrepan apenas desde el punto de vista de su expresión.[1] Por supuesto, a diferencia del ejemplificado, existen contrastes expresivos relevantes (desde el punto de vista epistémico) entre demostraciones. En particular, resulta de interés aquel que distingue entre medios expresivos lingüísticos y medios expresivos gráficos o visuales.

En general, puede hablarse de *heterogeneidad expresiva* cuando se apela a combinar, con fines comunicacionales, recursos lingüísticos y recursos visuales; se puede apreciar este fenómeno, por ejemplo, en la célebre serie de obras de Magritte (en las cuales se lee la frase "Ceci n'est pas une pipe") o en los caligramas de Apollinaire[2]. En particular, esta propiedad puede predicarse de la expresión o comunicación de una demostración matemática. Puede además hablarse, en este último caso, de *heterogeneidad inferencial* cuando tal apelación doble resulta esencial (epistémica, argumentativamente) para la demostración (Seoane 2016). Como se advierte, esta última propiedad se aplica legítimamente si existe ese vínculo o articulación entre comunicación y estructura demostrativa; por ello, puede predicarse, sin pérdida de precisión, de la demostración como unidad constituida por ambas. Así pues, asertar que una demostración es inferencialmente heterogénea es afirmar que en ella hay pasos en los cuales se presenta una interrelación sofisticada entre comunicación y estructura, especialmente sensible a la configuración mixta de la primera. O, en forma más directa, el desafío filosófico que plantean tales casos de heterogeneidad es *bidimensional:* entender, respecto de tales pasos o movimientos inferenciales, el significado lógico (dimensión inferencial) de la interacción visual-lingüística (dimensión expresiva). En los desarrollos que siguen, se acentuará, en general, el contraste entre heterogeneidad (meramente) expresiva y heterogeneidad inferencial; no obstante, vale la pena estimular en el lector una sensibilidad *gradualista* al respecto: la complicidad entre expresión e inferencia puede adoptar formas más o menos explícitas y rotundas.

---

1 La distinción entre estructura demostrativa y expresión (más allá de denominaciones) se encuentra en diversos autores; por ejemplo, una interesante y profunda defensa de tal distinción puede leerse en el Capítulo 19 de Chateaubriand 2005.

2 Los ejemplos, por supuesto, son innumerables. Quizá valga la pena rememorar la célebre ánfora atribuida al Pintor de Neso (año 600 a. C. aproximadamente); en el cuello de esta pieza se representa a Heracles en combate con el centauro Neso -identificados por un *dipinto*, a saber: "letras pintadas sobre la cerámica, no incisas" (Rodríguez Pérez y Mannack 2019, p. 24).

Un caso paradigmático de heterogeneidad inferencial lo constituye, en general, el razonamiento geométrico basado en diagramas; ejemplos, por antonomasia, de demostraciones inferencialmente heterogéneas son aquellas que conforman los *Elementos* de Euclides. ¿Por qué? Porque es posible identificar en tales demostraciones pasos o movimientos que, inequívocamente, cuentan como inferencialmente heterogéneos. Manders quizá fue el primer autor que resaltó la "coordinación" entre ambos medios expresivos (visual, lingüístico) como una clave para la comprensión del original estilo deductivo euclidiano:

> *The key to reconstructing standards for producing and reading diagrams is the realization that diagram and text contribute differently, so as to make up for each other's weaknesses. Some things may be read off directly from a diagram, some may be inferred only from prior entries in the discursive text.* (Manders 2008, pp. 88-89)

Puede apreciarse tal interacción desde múltiples puntos de vista. Por ejemplo, escribe Netz:

> *Note the combination: the visual presence allows a synoptic view, an easy access to the contents; the verbalisation limits the contents. The text alone is too difficult to follow; the diagram alone is wild and unpredictable. The unit composed of the two is the subject of Greek mathematics.* (Netz 1999, p. 181)

Más allá de diferencias o matices, hay un énfasis compartido: la clave está en la coordinación y complementación. Este trabajo continúa así una perspectiva que se ha propuesto estudiar la economía inferencial heterogénea, procurando atender a la compleja e intensa red de interacciones que supone la cooperación visual-lingüística.[3] Desde esta perspectiva, posee interés el estudio de modalidades de cooperación visual lingüística (plano expresivo) en su articulación con la estructura demostrativa (plano lógico). En el presente escrito se distinguen cuatro modos de intervenir el diagrama en la demostración heterogénea euclidiana: contribuyendo a la *aplicación* de esquemas o estrategias inferenciales vigentes, *pautando* o *estructurando* la secuencia demostrativa heterogénea, aportando a la definición de "*la descomposición del espacio lógico*" (Netz 1999), incidiendo en la *reducción* de alternativas a considerar. En todos estos casos el diagrama participa como recurso cooperante en

3 Un desarrollo general de este punto de vista puede leerse en Seoane (2016).

el contexto heterogéneo, pero, como se advirtió antes, es necesario estudiar aquella articulación entre los planos respectivos para reputarlos comprensivamente como ejemplos de heterogeneidad inferencial.

El itinerario de este trabajo es el siguiente. Los apartados 1 y 2 se dedican a discutir una primera modalidad heterogénea identificada en los *Elementos*, a saber, aquella que capta la contribución diagramática a la aplicación de esquemas inferenciales. El apartado 3 caracteriza, en forma sucinta, una modalidad heterogénea que supone un tipo especial de operación diagramática, a saber, aquella que se observa en el denominado "método de superposición" y que pauta o estructura la secuencia demostrativa. El apartado 4 llama la atención sobre una modalidad que supone explotar el diagrama a los efectos de delimitar o definir el "espacio lógico". El apartado 5 contempla cómo se complementan diagrama y texto en estrategias de reducción de casos a tratar. Finalmente, el apartado 6 acota el alcance de la clasificación propuesta y sugiere líneas de trabajo futuro.

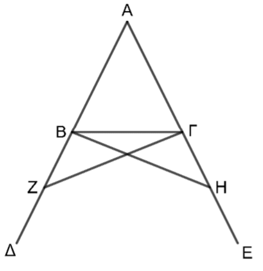
1

Los diagramas cumplen un papel epistémico destacado (en un sentido amplio) en la trama demostrativa euclididana; su actuación se desarrolla, generalmente, en relevante interacción con el texto. Luego, caracterizar formas o modos que exhibe su aporte consiste en describir, más que su papel solitario, su participación en una sofisticada trama visual-lingüística; en particular, cuando se trata de identificar modalidades de heterogeneidad inferencial, es necesario atender a cómo tal cooperación respalda (en forma aceptable, desde el punto de vista normativo) determinadas proposiciones.

La primera modalidad es quizá la más obvia: consiste en explotar el diagrama a los efectos de *aplicar* un esquema o estrategia inferencial vigente en el contexto de razonamiento euclidiano. Tal aplicación se apoya en la extracción, a partir del diagrama, de cierta información co-exacta -en el sentido de Manders; sin ese insumo naufragaría la instanciación del esquema y luego el "tránsito" argumental correspondiente (al menos preservando la identidad de estilo demostrativo).[4] Al interior de esta modalidad, resulta interesante

4 La distinción entre atributos exactos y co-exactos juega un papel esencial en la comprensión del razonamiento geométrico tradicional basado en diagramas. Como expresa Manders, los atributos exactos son aquellos que, "since Descartes' time", son susceptibles de expresarse a través de ecuaciones, son "unstable under perturbation of a diagram", y se ubican más allá de nuestro control al trazar y apreciar visualmente los diagramas (Manders 1996, 393). Los atributos co-exactos o no-exactos, por el contrario, son aquellos que "are unaffected by some range of every continuous

evaluar en cada caso cómo se articulan los planos expresivo y estructural. Por ejemplo, tómese I.5; el diagrama es el siguiente:



Se lee en Euclides[5]

> *Como la recta entera AZ es igual a la recta entera AH, cuyas respectivas partes AB y AΓ son iguales, entonces la parte restante BZ es igual a la parte restante ΓH.*

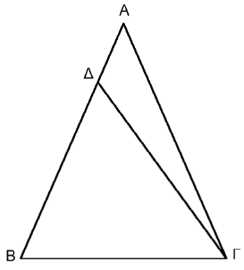
Es este un ejemplo inequívoco de heterogeneidad expresiva. ¿Se trata así mismo de heterogeneidad inferencial? Por supuesto la relación de igualdad entre BZ y ΓH no se extrae del diagrama; el argumento que justifica su afirmación se apoya en NC3. Pero ¿cómo se aplica NC3? Por la identificación de BZ como la "parte restante" tras quitar AB de AZ y la identificación de ΓH como la "parte restante" tras quitar AΓ de AH. Como es evidente, existe un trabajo general de "mapeo" o "asociación" de puntos y segmentos sobre el diagrama, pero el aspecto decisivo a resaltar es que el estatus de "parte restante" (esencial al uso inferencial de NC3) se apoya, en la interacción diagrama-texto propia de este estilo deductivo, en el diagrama. Más aún, podríamos decir que explota la idea que el todo es la suma de las partes. Así pues, con prescindencia del diagrama, ¿el "tránsito" argumental podría ocurrir? Parece evidente que, sin una variación sustantiva en aquel estilo, la respuesta debiera ser negativa. Luego, aunque quizá no resulte tan directo como el caso que se discute a continuación, parece razonable reconocer aquí la heterogeneidad inferencial.

---

variation of a specified diagram" (Manders 2008, 92). "We might say they express the topology of the diagram." (Manders 1996, 393). La información que legítimamente puede leerse en los diagramas es, por regla general, la co-exacta.

5 Se sigue, en general, Euclides (1991) y, en algunos casos, se consulta Euclid (1956).

Atendamos ahora a la demostración de I.6; la figura correspondiente es la siguiente:

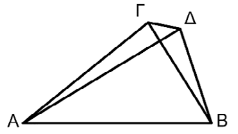


Se lee en Euclides:

> *… el triángulo ΔBΓ será igual al triángulo AΓB, el menor al mayor;…*

La afirmación que ΔBΓ es menor que AΓB surge de la constatación de una relación diagramática entre parte y todo; este movimiento de predicación de la desigualdad a partir de la constatación de la relación parte-todo puede entenderse como un tránsito inferencial mediado por NC5.[6] Luego la aplicación de NC5 aquí depende decisivamente de la aportación informativa del diagrama respecto a la relación parte-todo correspondiente, donde la noción común cumple un papel relevante en la explicitación y legitimación axiomática del vínculo entre la relación aprehendida en el diagrama y la relación geométrica. Si se formula ahora la pregunta acerca de la dependencia del tránsito inferencial de la información provista por el texto, la respuesta debiera ser obviamente afirmativa y, consecuentemente, se trata de un ejemplo neto de heterogeneidad inferencial.

Finalmente, considérese I.7; la figura correspondiente es



6 Este papel de NC5 es apuntado por Lassalle Casanave & Seoane (2016). Una fundamentación rigurosa y más general (pues incluye a NC4) de esa función, así como la defensa brillante de una hipótesis histórica que la respalda se encuentran en De Risi (2020).

Se lee en Euclides

> *Ahora bien, puesto que ΑΓ es igual a ΑΔ, también es igual el ángulo ΑΓΔ al ángulo ΑΔΓ (I, 5), por tanto, el ángulo ΑΔΓ es mayor que el ángulo ΔΓΒ;…*

La calidad de ángulos de la base del triángulo isósceles (condición de aplicación de I. 5) es identificada fácilmente apelando al diagrama, es decir, ΑΔΓ es igual ΑΓΔ y, extrayendo la información del diagrama, se tiene que ΔΓΒ (parte) y ΑΓΔ (todo). Luego, ΑΔΓ es mayor que ΔΓΒ.

Como se advierte, la modalidad de intervención del diagrama es perfectamente identificable en estos ejemplos pues se trata de explotar información codificada visualmente a los efectos de operar ciertos tránsitos inferenciales, en general, respaldados por esquemas lingüísticos perfectamente establecidos. En el próximo apartado, discutiremos un caso que quizá pudiera pensarse como límite en relación con esta descripción.

2.

De acuerdo a Manders, la apelación a la información gráficamente codificada puede legítimamente respaldar afirmaciones de naturaleza coexacta; la justificación de aserciones exactas (como, paradigmáticamente, las que expresan relaciones de igualdad) corresponde, por regla general, a la labor lingüística. Pero hay un caso especialísimo, identificado adecuada y finamente por Manders:

> *But judgements of equality, if to be made from a diagram, rather than inferred from prior entries in the text, require not just equality but instead its most explicit possible form: coincidence that arises in an extremely direct way from the constraints under which the (imperfect) diagram is produced; such as the common side in the triangles which arise in the proof of I.6.* (Manders 2008: 90-91)

En este caso el diagrama da lugar, directamente, al juicio de igualdad, pues ofrece la *coincidencia* como dato. Siguiendo esta línea argumental (atendiendo al ejemplo de lado común que se usa en la prueba de I.6) parecería distinguirse así este uso de los casos previamente considerados. La figura, a primera vista, en esta oportunidad, proveería todo lo necesario: la igualdad en "su forma más explícita posible". Es decir, la coincidencia sería, precisamente, esa forma inequívoca de la igualdad y, consecuentemente, el diagrama la exhibiría y el texto simplemente la recogería. Esta traducción o paráfrasis neutra reduciría el papel del texto al mero testimonio, empoderaría radicalmente al diagrama en la economía inferencial y, por esta razón, la modalidad de interacción visual-lingüística no coincidiría exactamente con aquella en que el componente gráfico colabora a los efectos de permitir el uso de un esquema inferencial vigente. El diagrama aporta a la justificación de una aserción directamente, sin la mediación de esquema inferencial alguno.

Sin embargo, esta última lectura parece proceder con demasiada prisa respecto de una situación que dista de ser clara. ¿Es la coincidencia una "forma" de la igualdad? O, dicho de otra forma, ¿"igualdad" es "coincidencia"? Quizá convendría tomarse en serio una evidencia notable: hay proposiciones demostradas que envuelven la igualdad, no las hay que enseñen propiedades de la coincidencia. La primera es, inequívocamente, una relación teórica, la segunda no luce así. Más allá de una explicación profunda de la articulación entre estas nociones, podría sospecharse una suerte de "pasaje" de la última a la primera que torna la situación, en algún sentido, análoga (aunque claramente no idéntica) a algunas de las que hemos discutido arriba. En tal sentido, aunque el pasaje referido es de una naturaleza obviamente menos explícita que en los casos anteriores, su identificación torna menos "directa" la contribución del diagrama y, en ese sentido, respalda la inclusión de este ejemplo en la categoría estudiada.

Como se ha apuntado, la situación dista de resultar unívoca. Incluso podría suscitarse la duda acerca de la contribución del diagrama en estos casos inferenciales. Nótese que, desde una óptica contemporánea, resulta muy natural entender tal razonamiento como un caso de inferencia, por así decir, "lógica". Por ejemplo, en el análisis de la demostración (aparente) de la aserción "todos los triángulos son equiláteros", Norman se propone identificar en la cadena deductiva, en forma precisa, dónde se ubica la contribución diagramática y dónde solo entran en obra respaldos lingüísticos (Norman (2006): pp. 3-4). En tal cadena argumental reiteradamente se apelaría al diagrama (más allá de cuál opción de las arriba descriptas se prefiera) para hacer el trabajo inferencial, pues al menos se usa en más de una oportunidad el hecho de que ya que dos figuras comparten un lado, este es igual a sí mismo. Ahora bien, Norman simplemente identifica en tales casos una aplicación de la ley de identidad (escribe como justificación de esas líneas: "por auto-identidad"). Consecuentemente, cuando aísla la intervención del diagrama en la argumentación falaz, estos casos no son señalados como poseyendo (desde el punto de vista de la justificación) dependencia alguna de la figura. Desde esa perspectiva, la contribución inferencial del diagrama (a diferencia de las alternativas interpretativas antes propuestas) se reduce a cero. Debe retenerse que Norman no se propone normalizar la argumentación en cuestión subsanando proposicionalmente eventuales "gaps" diagramáticos; por el contrario, procura identificar el argumento "basado en diagramas" a los efectos de proveer el diagnóstico adecuado de la falacia en cuestión.

Este carácter debatible del caso justifica dejar cautamente el tema abierto, aunque señalando una posible interpretación que lo ubica como un caso especial en la clase más general donde el diagrama aporta a la eficacia de una cierta estrategia inferencial vigente.

Los casos discutidos en los dos últimos apartados, si adecuadamente incluidos como ejemplos de la primera modalidad identificada, no pueden sino resultar ejemplos de heterogeneidad inferencial. No obstante, ni la clasificación de un caso como perteneciente a la modalidad en cuestión, ni la forma específica que adopta en cada oportunidad la articulación entre los planos expresivo y estructural, como se ha visto, resultan necesariamente obvias. Por otra parte, esta modalidad se apoya en una perfecta secuencialización lingüística (textual) de la decodificación visual (diagrama). Esta observación apunta a subrayar un tipo de dinámica heterogénea (en la dirección texto-diagrama) que se evidencia en la *lectura* del diagrama.[7] No obstante, tal interacción quizá afecte una dimensión menos directa: la *producción* diagramática. Este sería el caso, si (tal cual piensa Manders) la fidelidad del diagrama a las atribuciones exactas del texto privilegia aquellas que en este ocurren primero así como, en el contexto de la demostración por absurdo, aquellas precisamente que se ubican "afuera" del contexto de la reducción.[8] De esta forma el diagrama se vería determinado en su factura por la secuencia ordenada de la demostración lingüística. En pocas palabras, el diagrama resultaría impactado por la secuencialidad *ordenada* textual en dos niveles: en su lectura y en su producción. Estas observaciones conducen directamente a una cuestión mayor: cómo se administra, de un modo normativamente satisfactorio, los "permisos" de fidelidad e infidelidad diagramáticas en relación a las especificaciones textualmente establecidas. I.7 es, en tal sentido, un caso extremo: "appears subject to neither segment equality in question there, nor to either angle equality obtained in the course of the proof" (Manders 2008, 110). En síntesis, si se acepta este razonamiento, la contribución diagramática vía esta modalidad poseería consecuencias importantes en la lectura del diagrama así como en su diseño.

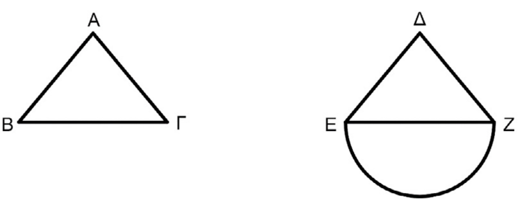
---

7 Este aspecto se discute, por ejemplo, en Seoane (en prensa).

8 Véase Manders (2008, pp. 110 y ss.)

3.

El denominado “método de superposición” representa una modalidad especial de heterogeneidad inferencial. La contribución diagramática, en este caso, *pauta* o *estructura* la estrategia demostrativa heterogénea de la demostración. O, expresado de otra forma: la secuencia inferencial es determinada (significativamente) por la operación diagramática. ¿Qué ocurre? Dicho en forma esquemática, tal modalidad supone seleccionar una figura y moverla (mentalmente) a los efectos de superponerla sobre otra y obtener luego las consecuencias correspondientes. Esta operación es liderada por el diagrama en una acepción dinámica. Más específicamente, la estrategia demostrativa se encuentra pautada por la especificación del *vínculo* entre las dos figuras; la naturaleza de tal especificación es preeminente, pero no exclusivamente, diagramática, y se concreta en un proceso esencialmente heterogéneo. La ejemplificación paradigmática de este método se encuentra en la demostración de I.4. La figura usada es la siguiente:



El texto demostrativo de Euclides comienza así

> *Pues si se aplica el triángulo ABΓ al triángulo ΔEZ y el punto A se coloca sobre el punto Δ y la recta AB sobre la recta ΔE, coincidirá también el punto B sobre el punto E por ser igual AB a ΔE; …*

Como el lector puede apreciar directamente en el pasaje euclidiano, se apela al traslado del triángulo ABΓ sobre el triángulo ΔEZ. Pero este consiste, esencialmente, en la aserción de la coincidencia de A sobre Δ y la coincidencia de AB sobre ΔE: este es el resultado que respalda la traslación mental autorizada directamente por el método. A este momento eminentemente diagramático le sucede un interesante entramado argumental esencialmente heterogéneo (aunque liderado por la estructuración diagramática). Un ejemplo elocuente puede apreciarse en el texto citado: la coincidencia de B y E surge de la conjunción de la información aportada por información diagramática (que permite la "colocación" de un segmento sobre otro) e información codificada lingüísticamente, a saber, la igualdad de tales segmentos (que forma parte de las asunciones iniciales). Esencialmente, mediante estos recursos se logra probar que los lados AB y ΔE y AΓ y ΔZ coinciden, así como la base BΓ coincide con la base EZ (para demostrar esto último es necesaria la apelación a una *reductio ad absurdum*). La Noción Común 4 permite, a partir de la coincidencia, demostrar la igualdad. Este pasaje de coincidencia a igualdad es explotado intensivamente y permite demostrar las distintas aserciones que componen el contenido del teorema; esencialmente, la igualdad de los triángulos considerados.

Euclides al parecer era renuente a la aplicación de este método; suele indicarse que se encuentran en los Elementos tres únicos ejemplos: I.4, I.8 y III.24[9]. Hartshorne observa en este sentido lo siguiente:

> *Euclid uses this method again in the proof of I.8, but it appears that he was reluctant to us it more widely, because it does not appear elsewhere. If it were a generally accepted method, for example, then Postulate 4, that all right angles are equal to each other, would be unnecessary, because that would follow easily from superposition.* (Hartshorne 2000, p. 33)

Desde el punto de vista de este escrito, podría decirse que aquí cierta operación diagramática (donde el diagrama físico es parte de la misma, pero no la agota) determina la secuencia demostrativa lingüística, aunque debe tomarse nota de la variedad de contribuciones aludidas. Por ejemplo, en la tarea de establecer las aserciones de coincidencia. Por supuesto, podría observarse que este "primer acto" prepara un "segundo acto", a saber, aquel gobernado por NC4. Si se acentúa este último aspecto, quizá pudiera verse esta modalidad como una variante de la discutida en los apartados anteriores. Sin embargo, dada la complejidad y originalidad de la intervención diagramática, se optó por identificar esta como una modalidad diversa. En pocas palabras, aquí el diagrama (en una acepción radicalmente dinámica) pauta la estructura demostrativa heterogénea. Su contribución no afecta, en exclusividad, la justificación de una serie de aserciones, sino que respalda su *orden* y su *articulación*; impacta holística o globalmente sobre la trama inferencial, no insular o "atómicamente". Si se nos permite la metáfora, respalda un cierto "movimiento" o "trama" inferencial, más que exclusivamente un paso determinado.

9 Mancosu llama la atención (siguiendo a Heath) acerca del hecho sorprendente de que las razones de esta renuencia no se encuentran explícitamente expresadas sino hasta recién a mediados del siglo XVI -véase Mancosu 1996, p. 29.

4.

Netz, en su ya clásica obra "*The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*", identifica lo que él denomina "starting-points" (Netz 1999, 169 y ss.). Estos "puntos de partida" son, esencialmente, aserciones que se asumen como necesariamente verdaderas, sin ofrecerse justificación. Un tipo de puntos de partida es denominado por este autor "intuiciones"; en una formulación rápida, se trata de asercions "obviamente verdaderas". Escribe Netz

> *The most important intuition, perhaps, is yet another relative of 'decomposition' intuitions, only here the whole of logical space is decomposed.* (Netz 1999, p. 184)

Estas operaciones de descomposición del espacio lógico juegan un papel crítico en la demostración euclideana. Netz refiere a la estrategia argumental que explota tal descomposición como "grid". Luego un punto relevante es cómo se define la red o cuadrícula:

> *A certain grid is laid over the logical space, and everything is said to fall under it. The grid is exhaustive, hence the necessity it conveys. After all the options have been surveyed, no alternative should be left open.* (Netz 1999, p. 184)

Este autor advierte que, en algunos casos, tal delimitación o estructuración del espacio lógico es producto de una intuición más bien lógica, pero, en otros, se trata de una intuición más espacial (Netz 2003, p. 184). Desde el punto de vista de este escrito, el contraste es recogido acentuando otro aspecto: la modalidad peculiar de uso del recurso diagramático. En lugar de contribuir al tránsito inferencial explotando un esquema inferencial vigente, como en la primera modalidad estudiada, o aportar a estructurar globalmente un movimiento inferencial, como en el tercer apartado, el diagrama grafica (dicho en forma ligeramente metafórica) el elenco necesario de casos a considerar. Hay así un uso diverso (en el contexto heterogéneo expresivo), respecto de las alternativas antes expuestas, del recurso visual.

Veamos algunos ejemplos. En la demostración de I.13 puede leerse:

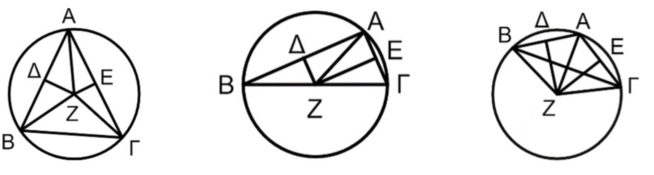
> *En efecto, si ΓBA es igual a ABΔ, son dos rectos [Def. 10]. Pero si no, trácese desde el punto B la recta BE…*

Aquí la "descomposición del espacio lógico" se produce a partir de apelar al *tertium non datur:* ΓBA es igual a ABΔ o no lo es[10]. Con un tipo de respaldo diverso, pero con igual protagonismo lingüístico, en el caso de I.26, la proposición determina los dos casos que deben considerarse: los lados iguales son los correspondientes a los ángulos iguales o los que subtienden uno de ellos. Nos encontramos lejos, en estos casos, de la heterogeneidad inferencial.

Un ejemplo elocuente de preeminencia diagramática en la definición de la descomposición pertinente (siguiendo a Netz) es IV.5. Se lee en Euclides

> *Divídanse en dos partes iguales las rectas AB, AΓ, por los puntos Δ, E [I, 10], y a partir de los puntos Δ, E trácese ΔZ, EZ formando ángulos rectos con AB, AΓ; entonces coincidirán o bien dentro del triángulo ABΓ o sobre la recta BΓ o fuera de BΓ*

La figura es



Si se sigue la sugerencia de Netz parecería aquí difícil restringir la apelación gráfica al plano expresivo; aún si entendemos, en general, tales ejercicios como el resultado de procesos exploratorios complejos (involucrando representación de exactos y co-exactos), el diagrama adquiere un protagonismo decisivo. Si debiéramos arriesgar una clasificación, resulta más razonable entonces aproximar estos casos a la categoría de la heterogeneidad inferencial.

Ambas modalidades suponen, desde el punto de vista de la dinámica heterogénea, un protagonismo mediático diverso: en los primeros casos, primado del lenguaje, en el último, primado del diagrama. Pero adviértase que en ambas estrategias la preponderancia no implica exclusión; la heterogeneidad expresiva sigue plenamente vigente. A diferencia de las dos modalidades anteriores, como se acaba de constatar, esta no asegura (en general y por sí) heterogeneidad inferencial.

---

10 El ejemplo ofrecido por Netz, para ilustrar la intuición lógica, es también de instanciación del tercero excluido, pero en Arquímedes (Netz 1999, p. 184).

Un rasgo importante del comportamiento del diagrama en el contexto de la demostración euclidiana es su ambigüedad. En un trabajo reciente, se subraya la importancia de la "ambigüedad perceptual" (Seoane, en prensa). Esta consiste, esencialmente, en la multiplicidad de configuraciones que admite un diagrama, de un modo similar a la multiplicidad de configuraciones que admiten ciertas tradicionales figuras popularizadas por la perspectiva psicológica gestáltica. Sin embargo, no es esta la única forma de ambigüedad diagramática relevante. Por ejemplo, en el tratamiento de los dos casos considerados en la demostración de I.26, expresamente establecidos en la enunciación de la proposición, es una suerte de ambigüedad (diversa) del diagrama la que permite su eficiente explotación. Tal rasgo permite se "asuma" exclusivamente, en un caso, la igualdad entre los lados correspondientes a los ángulos iguales y, en el otro, la igualdad entre los lados que subtienden a los ángulos iguales (o, para ser más exactos, uno de los casos); los lados asumidos como iguales varían, pero el diagrama utilizado es el mismo. Este fenómeno podría denominarse "ambigüedad interpetativa" del diagrama, para diferenciarla de la referida "ambigüedad perceptual".

La ambigüedad interpretativa consistiría entonces en estas variaciones producidas por la "semantización" y "de-semantización" de componentes del diagrama; estas operaciones posibilitan a un único diagrama físico (o mental) estar cooperativamente activo en diversos casos. La ambigüedad diagramática (ya se trate de su acepción perceptual o topológica o "co-exacta", ya se refiera a su acepción interpretativa o métrica o "exacta")[11] asociada a la capacidad del agente matemático, de variar (al influjo de la dimensión lingüística) su decodificación, sustenta la dinámica heterogénea. El encaje entre ambigüedades y capacidades del agente resulta esencial.[12] La ambigüedad diagramática contribuye al funcionamiento heterogéneo del caso estudiado, pero no se advierte un lazo estructural con esta modalidad.

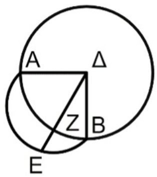
Al igual que I.13 y I.26, el caso de IV.5 ejemplifica la heterogeneidad expresiva: la explicitación lingüística de las tres alternativas (representadas en el diagrama físico) expresa su vigencia como descomposición del espacio lógico y, a

11 El contraste entre ambigüedad perceptual e interpretativa se sostiene sólidamente en las observaciones precedentes. Por supuesto, oposiciones tales como topológica/métrica o, en clave metodológica, coexacta/exacta pueden resultar sugerentes. En cualquier caso, se espera desarrollar este punto en el futuro.

12 La relevancia de la interacción "agente/marco" a los efectos de aproximarse a captar una práctica matemática es propuesta por Ferreirós (2016); el énfasis en el "encastre" (referido a la ambigüedad perceptual) es resaltado en Seoane (en prensa).

partir de ella, se organiza el tratamiento secuencial de cada una en la demostración. Pero, a diferencia de I.13 y I.26, el protagonismo del diagrama es notorio; este contribuye al establecimiento de las opciones. Debiera enfatizarse, no obstante, que tal inferencia no puede reducirse a la inspección del diagrama, sino que consiste en un proceso al que Manders denomina "exploración" y que supone la evaluación y el análisis de las diferentes alternativas y, consecuentemente, un tratamiento no exento de apelación al recurso lingüístico.

Quizá valga la pena registrar aún un caso de primacía diagramática ligeramente diferente a IV.5. Se trata de III.2. Esta es la figura



Los casos a tratar surgen a partir del diagrama al igual que en IV.5, pero, a diferencia de este, tal contribución no se apoya exclusivamente en el diagrama físico. Se respalda así mismo en la apelación a, por así decirlo, la representación diagramática mental. El único diagrama físico usado en la demostración es el de arriba (contrastando con IV.5); los casos discriminados son tres: la recta AEB cae fuera del círculo (que es la alternativa retratada en el diagrama), cae sobre la circunferencia o cae dentro del círculo. La demostración (usando el diagrama físico) descarta la primera opción y luego hace constar que de "la misma manera" podría demostrarse "que tampoco caerá sobre la misma circunferencia; por lo tanto (caerá) dentro".

El objetivo modesto de este escrito (al retomar la observación de Netz) es advertir apenas una original modalidad heterogénea; desafíos más profundos en su comprensión enriquecerán y eventualmente clarificarán mejor las respectivas contribuciones en cada caso de ambos medios expresivos[13]. Posee esta modalidad puntos de contacto con la anterior, pero exhibe una diferencia importante: su función inferencial. Al igual que aquella, posee un cierto impacto holístico, pero mientras la función inferencial de la primera se encamina al establecimiento de una relación específica, esta contribuye a generar el espacio lógico general.

13 Por ejemplo, ¿cómo puede lidiar procedimentalmente la geometría tradicional en relación a la completud de las distinciones de casos o a la producción de variantes? Véase, al respecto, Manders 2008, 107 y ss.

5.

En el desarrollo de las demostraciones por absurdo, por ejemplo, puede ocurrir que deban considerarse, al asumir la negación de aquello que se pretende demostrar, necesariamente más de una situación geométrica alternativa -una particular "descomposición del espacio lógico". Casos como este son habituales en Euclides. En tales oportunidades, frecuentemente, el diagrama contribuye (en el marco heterogéneo) a una suerte de "reducción" de casos. Por ejemplo, esto ocurre en I. 6.

Como ya vimos, la demostración ofrecida en Euclides es por absurdo. Se asume precisamente que AB no es igual a AΓ. Esta asunción, como registra el texto euclidiano expresamente, equivale a aceptar que uno de ellos es mayor que el otro; es decir, la asunción no permite inferir otra cosa, dada la tricotomía, que la disyunción de dos desigualdades. La demostración del absurdo que sigue, sin embargo, se desarrolla a partir de la asunción que AB es mayor que AΓ y no se hace referencia alguna a cómo podría implementarse la demostración del caso en que AΓ fuese mayor que AB. El carácter obvio de la demostración omitida dimana del uso, por así decirlo, de las mismas ideas que aquellas que articulan la prueba efectivamente dada, pero la autorización (implícita) de tal opción se sustenta (parcialmente al menos) en la evidenciación en el diagrama, vía su apreciación topológica, de cuáles son los rasgos relevantes movilizados por la demostración del caso y su invariancia. El respaldo provisto por el diagrama consiste así en la visualización rápida del fundamento que posibilitaría la "traducción" rutinaria para probar el caso omitido. Quizá una forma más precisa de describir la situación sea la siguiente: el diagrama contribuye a aprehender (en el contexto heterogéneo) las relaciones estructurales que subyacen al tratamiento del caso y su vigencia también en el caso desconsiderado, movilizando para ello la red heterogénea que permite reinterpretar el diagrama y operar mentalmente. Es tal garantía la que respalda eficientemente la reducción de los casos explícitamente desarrollados. Podría atribuirse la justificación, sintéticamente, a la simetría, como lo hace Manders, atribución perfectamente en línea con la argumentación desarrollada antes, pues en el contexto heterogéneo tal relación se expresa notablemente en el diagrama. Este filósofo llama la atención sobre el hecho que, cuando la negación de la hipótesis del absurdo no exhibe este rasgo, la reducción no es posible, como en I.25 (Manders 2008, 112).

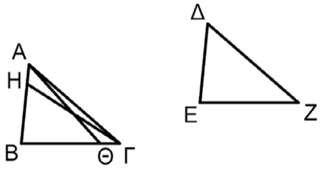
Los servicios que presta el elemento gráfico aquí parecen distinguir una forma novedosa respecto de las tres modalidades ya estudiadas; no se trata de contribuir en la aplicación de un esquema inferencial, ni de pautar o estructurar la estrategia demostrativa, ni de particionar el espacio lógico, sino de *seleccionar* cuántos casos deben tratarse explícitamente a los efectos de cumplir los cánones de rigor demostrativo. Dicho de otra forma: sin pérdida de rigor, cuánto debe tratarse explícitamente.

La reducción aludida no ocurre exclusivamente en el contexto de las demostraciones por el absurdo. Repárese en I. 26.

Esa proposición afirma que

> *Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales respectivamente a dos ángulos del otro y un lado del uno igual a un lado del otro: ya sea el correspondiente a los ángulos iguales o el que subtiende uno de los ángulos iguales, tendrán también los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante (igual) al ángulo restante.*

La figura correspondiente es



La demostración en este caso asumirá que los ángulos iguales son ΑΒΓ igual a ΔΕΖ y ΒΓΑ igual a ΕΖΔ. La "reducción" aquí no es producto de la estrategia del absurdo y no involucra segmentos, sino ángulos. La percepción o aprehensión aludida no puede reducirse (al igual que en el caso anterior) a la extracción de cierta información visual provista por el diagrama (gráfico o mental), sino que envuelve toda la complejidad del contexto heterogéneo inferencial. Por ejemplo, las variaciones de los ángulos que pueden asumirse como iguales supone una atribución textual o lingüísticamente respaldada al diagrama; la manipulación mental de las variantes diagramáticas no "desaprende" esa cooperación establecida y explota eficientemente así la ambigüedad interpretativa del diagrama.

No se pretende (obviamente) sostener que la política de reducción de casos solo acontezca en el razonamiento basado en diagramas, sino que el punto es otro: advertir cómo, en este contexto específico, los diagramas contribuyen a tales decisiones estratratégicas demostrativas, constituyendo así una modalidad interactiva particular. No podríamos aventurar, por supuesto, una respuesta general categórica acerca de la articulación entre los planos expresivo y estructural en el contexto de esta modalidad; al igual que en las discusiones anteriores cada caso mercerá un estudio particular. Los ejemplos arriba discutidos exhiben una complementariedad que parecería inclinar la balanza por la opción de la heterogeneidad inferencial.

En general, esta modalidad contrasta (en cierto sentido) con aquella estudiada en el primer apartado. En la modalidad discutida en el apartado 1, la información codificada en el diagrama físico es explotada en forma secuencial en vínculo directo con la progresión del texto; en la modalidad discutida en este apartado, no usamos en forma estrictamente secuencial la información provista por el diagrama físico así como por los diagramas mentales correspondientes, a los efectos de justificar la reducción (de hecho, tal justificación no requiere contrapartida lingüística expresa alguna). Mientras que en el primer caso la decodificación del diagrama era sometida al ritmo secuencial lingüístico (y, eventualmente, el propio diseño del diagrama al orden de la secuencia), en esta la situación parece revertirse parcialmente: la aprehensión de las propiedades estructurales diagramáticas (compartidas y relevantes) no son mediadas con igual intensidad por el regimen secuencial lingüístico, aunque seguramente resultan orientadas por la jerarquización de la demostración. En el primer caso, en la explotación diagramática, por así decirlo, existe un cierto liderazgo textual, en este, una cierta preeminencia gráfica.

6.

¿Describe esta lista de modalidades en forma exhaustiva las formas de explotar el diagrama en el contexto de la geometría euclidiana? No. Existen usos complejos de los diagramas que demandan un estudio más profundo, si se pretende captar su contribución particular en una economía heterogénea e inferencial. Por ejemplo, la distribución o restriccion de “permisos” respecto a la fidelidad del diagrama a las atribuciones textuales o la dinámica exploratoria (en el sentido atribuido a este término por Manders), resultan aspectos relevantes a los efectos de entender mejor las articulaciones propias de la heterogeneidad inferencial. En particular, el impacto de las decisiones representacionales diagramáticas en relación a las condiciones exactas sobre los aspectos topológicos o coexactos conforma un capítulo interesante en términos de “ajuste” mediático inferencialmente relevante (o, para decirlo en la terminología de Manders, de “control de la apariencia diagramática”). Quizá no siempre se distinguen “desajustes” de este origen respecto a otros desafíos como aquellos referidos al cumplimiento de la exhaustividad de la partición del espacio lógico. Avanzar en aspectos como este promete iluminar, por ejemplo, matices en la interpretación del origen del error respectos de ciertas falacias geométricas.[14] Pero un análisis de esa amplitud excede largamente el módico objetivo de estas páginas: presentar apenas algunas formas significativamente diversas de manifestarse la heterogeneidad visual-lingüística inferencial en Euclides.

Referencias

CHATEAUBRIAND, O. (2005) *Logical Forms, Part II – Logic, Language, and Knowledge*, Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência.

DE RISI, V. (2020) "Euclid's Common Notions and the Theory of Equivalence", *Foundations of Science*, https://doi.org/10.1007/s10699-020-09694-w

DUBNOV, Ya. S. (2006) *Mistakes in Geometric Proofs,* (traducido por A. Henn y O. Titelbaum) en Fetisov, A. I. y Dubnov, Ya. S. (2006) *Proof in Geometry (with Mistakes in Geometric Proofs)*, Dover: USA.

EUCLID (1956) *The thirteen books of the Elements,* (Traducción y comentario Thomas L. Heath). New York: Dover.

EUCLIDES (1991) *Elementos (Libros I-IV)*, Traducción: M.L. Puertas Castaños, Introducción: L. Vega Reñón. Madrid: Editorial Gredos.

FERREIRÓS, J. (2016) *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, Princeton: Princeton University Press.

MANCOSU, P. 1996 *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Early Seventeenth Century,* Oxford: Oxford University Press.

MANDERS, K. (1996) "Diagram Content and Representational Granular- ity." *Logic, Language, and Computation.* Ed. by J. Seligman and D. Westerståhl. Vol. I. Stanford: CSLI Publications and Stanford University Press.

14 Por ejemplo, Dubnov vería la tradicional justificación falaz de la aserción "todos los triángulos son isósceles" como una falla, precisamente, en la determinación del espacio lógico, pues no se habrían examinado todos los casos posibles (Dubnov 2006, p. 24); según Manders el déficit se encontraría en el control de la apariencia diagramática (Manders 2008, pp. 124-125). El lector interesado en dicha falacia puede consultar, por ejemplo, Maxwell (1961) y Norman (2006); la respuesta disponible, en la práctica geométrica basada en diagramas, frente a usos patológicos como este puede leerse en Manders (2008, pp. 94 y ss.).

MANDERS, K. (2008) “The Euclidian Diagram (1995)”, en Mancosu, P. (ed.) (2008) *The Philosophy of Mathematical Practice*, 80-133. Oxford: Oxford University Press.

MAXWELL, E. (1963), *Fallacies in Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

NETZ, R. (1999) *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press.

NORMAN, J. (2006), *After Euclid*. Stanford: CSLI.

LASSALLE CASANAVE & SEOANE, J. (2016) “Las demostraciones por absurdo y la Noción Común 5” en Caorsi, E., Sautter, F. y Navia, R. (Editores) *Significado y Negación: escritos lógicos, semánticos y epistemológicos,* 39-50. Montevideo: CAPES-UdelaR.

RODRÍGUEZ PÉREZ, D. y MANNACK, T. (2019) *La cerámica ática y su historiografía*, Coímbra: Impresa da Universidade de Coimbra.

SEOANE, J. (2016) “Demostraciones heterogéneas: repensando las preguntas”, *Representaciones*, Vol. XII, N° 2, 87-108. Córdoba: SIRCA Publicaciones Académicas.

SEOANE, J. (en prensa) “Demostración euclidiana y ambigüedad perceptual”, en Sautter, F., Seco, G., Esquisabel, O. (Organizadores) De *Mathematicae atque philosophicae Elegantia Notas festivas para Abel Lassalle Casanave*.